

Raport stiintific sintetic

privind implementarea proiectului in perioada octombrie 2011 – octombrie 2013

Titlul proiectului: *Algebre Hopf si teme inrudite*, contract 88/05.10.2011. Director: prof. dr. Gigel Militaru.

Echipa: director de proiect, doi cercetatori cu experienta, doi doctoranzi la data inceperii proiectului (Ana Agore si Costel Bontea). Toti sunt angajati in *Centrul de Cercetare Algebra si Teoria Numerelor* la Universitatea din Bucuresti. Ana Agore si-a sustinut teza de doctorat in 1 octombrie 2012. Costel Bontea si-a inceput stagiul doctoral in 1 octombrie 2011 in cotutela intre UB si Free Univ. Brussel.

Abstract raport stiintific: In cei doi ani de derulare a proiectului au fost publicate 15 articole in reviste cotate ISI si un articol publicat in Proceedings-ul unei conferinte internationale indexat in baza de date ISI (Contemporary Math. AMS, Vol. 585, 2013). Toate articolele mentioneaza finantarea din proiect si raspund la problemele de cercetare ale celor doua mari obiective ale proiectului. Alte 8 articole stiintifice sunt trimise spre publicare. Rezultatele obtinute au fost diseminate de membrii proiectului prin 18 prezentari orale la conferinte internationale: 5 in anul 2012 si 13 in anul 2013.

Rezumatul rezultatelor stiintifice obtinute: Am sa folosesc numerotarea (nr. crt.) asa cum sunt enumerate articolele pe pagina web a proiectului corespunzatoare etapelor de raportare 2012 si 2013.

Anul 2012: Articolele [1] si [4] furnizeaza primele raspunsuri la **problema 2b)** din al **doilea obiectiv** al proiectului. Rezultatul principal din [4] stabileste o punte de legatura surprinzatoare intre conceptual clasic de algebra centrala simpla ce tine de inceputurile algebrei si conceptual modern de categorii braided. Mai precis am demonstrat urmatoarea teorema: o algebra finit dimensionala A este central simpla daca si numai daca categoria monoidala a A -bimodulelor este braided. In continuare rezultatul este echivalent cu existenta unui (unic) element R in $A \otimes A \otimes A$ care verifica un set de axiome naturale si relativ elementare. O astfel de pereche (A, R) am numit-o algebra quasitriangulara. Existenta unui braiding (daca exista acesta unic si este o simetrie) pe categoria de A -bimodule este in sine un fenomen surprinzator deoarece pana si banala aplicatie flip $(m, n) \rightarrow (n, m)$, care e bridgingul canonic pentru k -module pentru un inel comutativ k , nu doar ca nu este braiding dar nici macar nu este corect definita in cazul necomutativ. Algebrele quasitriangulare (A, R) introduce generalizeaza pe de o parte conceptul de algebra centrala simpla (in cazul finit dimensional conceptele coincid) dar si pe cel de algebra Azumaya. Cazul comutativ este si el surprinzator: o algebra comutativa este quasitriangulara daca si numai daca morfismul structural de algebra este epimorfism (in sens categoric) si in acest caz R este trivial. Pentru orice algebra quasitriangulara (A, R) ,

am construit o familie noua de solutii la celebra ecuatie cuantica Yang-Baxter. [1] continua studiul inceput: teorema principala furnizeaza sase descrieri echivalente ale centrului Drinfel'd a categoriei monoidale de A-bimodule. Printre aceste descrieri mentionam trei care sunt deosebite: categoria de descent necomutativ Grothendieck, categoria de coreprezentari peste coringul canonic Sweedler si categoria de module cu conexiuni plate din geometria diferentiaala necomutativa. Fiind centrul unei categorii monoidale toate aceste categorii sunt braided: prin urmare pe aceste categorii se pot face majoritatea constructiilor care exista pentru varietati diferentiabile.

Articolul [2] ofera un raspuns la **obiectivul II, problema 2b)** si studiaza patru probleme referitoare la functori reprezentabili. Fie R si S doua inele, C un R-coring si ${}^C\mathcal{M}$ categoria de C-comodule stangi. Se arata ca categoria tuturor functorilor reprezentabili ${}^C\mathcal{M} \rightarrow {}_S\mathcal{M}$ este categoria opusa categoriei ${}^C\mathcal{M}_S$. Mai mult, pentru un (S,R)-bimodul U sunt date conditii necesare si suficiente pentru ca functorul $U \otimes_R -: {}^C\mathcal{M} \rightarrow {}_S\mathcal{M}$ reprezentabil, echivalenta de categorii, separabil sau Frobenius.

Articolele [3] si [5] au constituit primul pas, la nivel de grupuri (resp. algebre Hopf), in abordarea **problemei 1b)** din **primul obiectiv** al proiectului care s-a dovedit foarte eficient pentru continuarea problemei si obtinerea de noi rezultate in 2013 pentru algebre Lie, algebre Leibniz, algebre asociative sau recent algebre Poisson. In [3] am rezolvat complet clasificarea produselor bicrossed descriind pana la un izomorfism toate grupurile E care *factorizeaza* prin doua grupuri fixate H si G. Am demonstrat ca aceasta clasificare este parametrizata de un set combinatorial de date constituit dintr-un automorfism al lui H, o permutare pe multimea G si o aplicatie de tranzitie v intre G si H. Ca aplicatii sunt demonstrate doua teoreme de tip Schreier privind clasificarea si citeva exemple concrete pentru cazul grupurilor ciclice sunt date in detaliu. Articolul [5] clasifica, pana la un izomorfism ce stabilizeaza A, algebrilor Hopf care factorizeaza prin doua algebra Hopf date A si H. Echivalent, sunt clasificate pana la un izomorfism stang A-liniar de algebra Hopf toate produsele bicrossed intre A si H. Se arata ca aceste obiecte sunt clasificate de un obiect coomological $\mathcal{H}_2(A,H)$. In constructia lui $\mathcal{H}_2(A,H)$ rolul central este jucat de anumite elemente din produsul $CoZ(H,A) \times Aut_{CoAlg}(H)$, unde $CoZ(H,A)$ este multimea aplicatiilor unitare cocentrale $H \rightarrow A$ iar $Aut_{CoAlg}(H)$ este multimea automorfismelor unitare de coalgebra $H \rightarrow H$. Printre numeroase alte aplicatii si exemple, sunt descrise prin generatori si relatii si clasificate toate produsele bicrossed intre H_4 si $k[C_n]$. Numarul tipurilor de izomorfism ale acestor grupuri cuantice este determinat folosind teorema Dirichlet. Ca o consecinta, grupul de automorfisme al acestor grupuri cuantice este de asemenea determinat.

Articolul [6] este parte a **primului obiectiv, problema 2d)** este data o conditie combinatoriala pentru ca un subgrup cu trivial core sa fie un subgrup de adancime impară. Conditia este expusa ca o anumita matrice cu intrari $\{0, 1\}$ sa aiba rank maximal.

Anul 2013: Articolul [1] este parte a **obiectivului II, problema 2d)**. Sunt determinate legile de fuziune echivariantizatei unei categorii de fuziune pe care actioneaza un grup finit G . Acestea sunt implementate si determinate in functie de legile de fuziune ale categoriei date si de un set de date combinatoriale formulate in limbaj de grupuri asociate actiunii. Ca aplicatie fundamentala sunt stabilite legile de fuziune ale unei categorii de fuziune punctuate doar in termeni de teoria grupurilor.

Articolele [2] si respectiv [4] au fost scrise si publicate in 2013 ca parte a **obiectivului I, problema 1a)**. Vom detalia rezultatele stiintifice obtinute; In primul rind este formulata problema prelungirii structurilor pentru algebre Leibniz (resp. algebre Lie) ca problema care generalizeaza si unifica doua probleme faimoase ale matematicii: problema extinderilor (initiate la nivel de grupuri de Holder) si problema factorizarii (lansata de laureatul fields J. Douglas, tot la nivel de grupuri in anii 50). Este data solutia pur teoretica a problemei prin constructia a doua obiecte de coomologie neabeliana care parametrizeaza si clasifica toate structurile de algebre Leibniz (reps. Lie) care se pot defini pe un spatiu vectorial dat si care contin ca subalgebra Leibniz (reps. Lie) o algebra data L . Ca aplicatii practice sunt descriese in detaliu tipurile de structuri de tip *steag* care prelungesc o algebra Leibniz (reps. Lie) la un spatiu vectorial de dimensiune mai mare introducind noi concepte matematice care au rolul cheie in solutionarea problemei si care generalizeaza derivarile clasice ale unei algebre Lie sau Leibniz. Ca bonus suplimentar, in cazul algerbelor Leibniz este constuit grupul neabelian de coomologie care clasifica toate extinderile unei algebre Leibniz date printr-o alta algebra Leibniz neabeliana (cazul abelian fiind rezolvat de Loday in anul 1993) si este introdus conceptul de pereche potrivita si produs biincrucisat de doua algerbe Leibniz care sunt unalta de clasificare a tuturor algerbele Leibniz ce factorizeaza prin doua algerbe Leibniz date (cazul corespunzator algebrelor Lie fusese introdus de Majid, Lu si Weinstein in geometria diferentiala la inceputul anilor 90). Problema la nivel de algebra Leibniz este practic la inceput si va fi exploatarea pe viitor pentru ca este extrem de promitatoare in obtinerea de noi rezultate si pentru ca in acest moment pe plan international algerbele Leibniz sunt *pe val* – se publica enorm de mult in ultimii ani articole in acest domeniu.

Articolul [3] a fost scris si publicat in 2013 ca parte a **obiectivului I, problemele 1a), 1b) si 1d)**. Vom detalia rezultatele stiintifice obtinute: este formulata si introdusa *problema clasificarii complementilor* unei extinderi de algerbe Hopf sau de algerbe Lie a carei solutionare necesita o teorie de tip descent necomutativ pentru produse biincrucisate. Ea poate fi privita si ca reciproca a problemei factorizarii. Este data solutia teoretica a problemei, atit pentru algebre Hopf cit si pentru algebra Lie. Pentru acesta sunt necesari

parcurgera a trei pasi si anume: deformarea complementilor prin introducerea unui nou tip de deformare asociata unei perechi potrivite de algebre Hopf (reps. Lie), descrierea tuturor complementilor si in fine clasificarea tuturor complementilor si calcularea indexului de factorizare – un concept pe care l-am definit ca masura numerica a problemei clasificarii complementilor. Ca aplicatie practica este construita o extindere de grupuri cuantice finit dimensionale al carei index de factorizare poate fi oricit de mare. Din nou mentionam faptul ca problema este abia la inceput de drum: am formulat-o si solutionat-o pentru grupuri (intr-un articol trimis spre publicare) si in [3] pentru algerbe Hopf si algebra Lie iar in ultima sectiune din [2] pentru algerbe Leibniz. Ea poate fi insa abordata pentru numeroase alte categorii de obiecte algebrice sau geometrice. In acest moment avem in lucru problema pentru algerbe asociative si pentru algebra Poisson.

Articolul [5] se incadreaza in **primul obiectiv, problema 1a)** si in **obiectivul II, problema 2a)**. Teorema principala stabileste o corespondenta bijectiva intre multimea tuturor structurilor coquasitriangulare pe un produs unified arbitrar al lui A cu H si un set de date (p, τ, u, v) ce corespund componentelor produsului unified. Ca aplicatie sunt obtinute conditii necesare si suficiente pentru ca dublul cuantic generalizat introdus de Majid sa fie algebra Hopf coquasitriangulata. De asemenea, sunt prezentate exemple explicite.

Articolul [6] se inscrie in **primul obiectiv, problemele 1a) si 1b)** si este dedicat clasificarii tuturor produselor crossed pentru doua algebre Hopf date A si H . Problema clasificarii extinderilor lui A prin H care spliteaza in categoria coalgebrelor se reduce la una pur computationala. Se arata ca multimea sistemelor crossed asociate perechii (A, H_4) , unde H_4 e algebra Hopf 4-dimensională a lui Sweedler, e in bijectie cu multimea $\mathcal{ZP}(A)$ a tuturor elementelor centrale si primitive ale lui A (rezultat valabil pentru orice algebra Hopf A). Mai mult, multimea claselor de echivalenta de produse crossed ale lui A cu H_4 e in bijectie cu o multime factor a lui $\mathcal{ZP}(A)$. Pentru ilustrare, se considera in final cateva cazuri explicite de alegere a lui A , printre care algebra Hopf polinomiala si algebra Hopf semisimpla p -dimensionala.

Articolul [7] ca parte a **obiectivului I, problema 1a)** este punctul de inceput al problemei prelungii structurilor (la nivel de grupuri). Am dat un raspuns teoretic complet la acesta problema: pentru rezolvarea ei am introdus un nou produs la nivel de grupuri, pe care l-am numit *produs unified*. Produsul unified este asociat unui grup H si unei noi structuri algebrice $(S, *)$, in care $*$ este o multiplicare pe S (S este o *fibra* in 1 a unei surjectii) care admite o unitate, orice element este inversabil la stinga dar conditia de asociativitate pe S este deformata de un cociclu f si o actiune la dreapta a lui H pe S . Am demonstrat ca orice structura de grup pe multimea E care contine pe H ca subgrup este izomorfa cu un produs unified si am clasificat pana la un izomorfism ce stabilizeaza H toate produsele unified. Acestea sunt clasificate de o multime *coomologica* $H^2(H, S)$ care va juca rolul celui de al

doilea grup de coomologie pentru problema extinderilor a lui Holder. Ca si consecinta o teorema generala de tip Schreier este obtinuta si un raspuns la o problema recenta a lui Kuperberg este dat.

Articolul [8] se inscrie in **obiectivul II, problemele 2d) si 2e)**. Ca rezultat principal este data o descriere a comutatorului unei subcategorii normale a categoriei de fuziune a reprezentarilor unei algebre Hopf semisimple. In cazul in care algebra Hopf este dublul Drinfel'd al unei algebre grupale asociate unui grup finit este data formula care calculeaza explicit nucleul reprezentarilor si este demonstrat ca toate aceste nuclee sunt subalgebre Hopf normale.

Articolul [9] este parte a **primului obiectiv, problema 1b)**, si este dedicat clasificarii tuturor produselor bicrossed a doua algebre Hopf ale lui Sweedler. Se arata ca, exceptand perechea triviala, perechile potrivite asociate perechii (H_4, H_4) sunt parametrizate de corpul de baza k . Fiecarui element λ din k ii corespunde un produs bicrossed, $\mathcal{H}_{4,\lambda}$, care e o algebra Hopf 16-dimensională, punctată, unimodulară și ne-semisimplă. Clasele de izomorfism ale acestor algebre Hopf sunt reprezentate de produsul tensorial al lui H_4 cu H_4 , $\mathcal{H}_{4,0}$ și $\mathcal{H}_{4,1}$, cea din urmă dovedindu-se a fi izomorfa cu dublul Drinfel'd al lui H_4 .

Articole stiintifice trimise spre publicare: In acest moment membrii proiectului de cercetare au trimise spre publicare urmatoarele 8 articole stiintifice, toate trimise catre reviste cotate ISI, in care continuam studiul la cele doua obiective ale proiectului.

[T1] S. Burciu – On coideal subalgebras of cocentral Kac algebras and a generalization of Wall's conjecture.

[T2] S. Burciu – On the irreducible representations of generalized quantum doubles.

[T3] A. L. Agore, G. Militaru – Classifying complements for groups. Applications,

[T4] A. L. Agore, C. G. Bontea and G. Militaru – The classification of all crossed products $H_4 \# k[C_n]$.

[T5] A. L. Agore, G. Militaru – The extending structures problem for algebras.

[T6] V. Chari, B. Ion – BGG reciprocity for current algebras.

[T7] G. Militaru – The global extension problem, co-flag and metabelian Leibniz algebras.

[T8] A.L. Agore, G. Militaru – The global extension problem, crossed products and co-flag non-commutative Poisson algebras.

15.10.201

Director proiect,
Prof. dr. Gigel Militaru