Raport stiintific

privind implementarea proiectului in perioada octombrie – decembrie 2011

Echipa proiectului *'Hopf algebras and related topics'*

Prof. dr. Gigel Militaru -- CS III dr. Sebastian Burciu: angajat din 8.12.2011 -- AC, drd. Costel Bontea: angajat din 8.12.2011 -- AC, drd. Ana Agore (plecata cu ordinul rectorului pana in 30 iunie 2012 la Free Univ. Brussel).

Articole acceptate spre publicare:

[AM1] A. L. Agore and G. Militaru, *Schreier type theorems for bicrossed products,* acceptat spre publicare in 17. 10. 2011 in Central European J. Math. (cotat ISI – IF 2010: 0.581)

Articole trimise spre publicare:

[AM2] A. L. Agore and G. Militaru, *Extending Structures I: the level of groups.*

[AM3] A. L. Agore and G. Militaru, *Unified products and split extensions of Hopf algebras*.

[ACM4] A.L. Agore, S. Caenepeel, G. Militaru, *Braidings on the category of bimodules, Azumaya algebras and epimorphisms of rings.*

[ACM5] A.L. Agore, S. Caenepeel, G. Militaru, *The center of the category of bimodules and descent data for non-commutative rings*.

Articole in curs de finalizare:

[SB1] S. Burciu, "*Mueger centralizers for the category of representations of a semisimple Drinfeld double*".

Rezumatul rezultatelor stiintifice obtinute:

Articolul [AM1] constituie primul pas in abordarea **problemei 1b)** din **primul obiectiv** al proiectului. La nivel de grupuri, am rezolvat complet clasificarea produselor bicrossed descriind pana la un izomorfism toate grupurile E care *factorizeaza* prin doua grupuri fixate H si G. Am demonstrat ca aceasta clasificare este parametrizata de un un set combinatorial de date constituit dintr-un automorfism al lui H, o permutare pe multimea G si o aplicatie de tranzitie v intre G si H. Ca aplicatii sunt demostrate doua teoreme de tip Schreier privind clasificarea si citeva exemple concrete pentru cazul grupurilor ciclice sunt date in detaliu. Rezultatele din [AM1] constituie sursa de inspiratie pentru a aborda problema de factorizare la alte categorii de obiecte matematice: algebre Lie, grupuri Lie, grupuri cuantice, etc. La nivel de algebre Hopf acest studiu l-am initiat deja impreuna cu A. Agore si C. Bontea (doctoranzi in echipa proiectului) si este in faza de redactare pentru a fi trimis spre publicare.

Articolul [AM2] este primul articol dintr-o serie de mai multe articole in care am lansat *the extending structures problem* (TESP) - acesta este **problema 1a) din primul obiectiv**. TESP unifica doua probleme celebre din teoria grupurilor (*problema extinderilor* a lui Holder si cea a *factorizarii* a lui Ore) si poate fi formulata in foarte multe domenii ale matematicii: grupuri ca in prezentul articol, algebre Lie, grupuri Lie, algebre, coalgebre, algebre Hopf, grupuri local compacte sau grupuri cuantice local compacte, etc. La nivel de grupuri TESP are un enunt simplu si tentant: *fie H un grup si E o multime care contine pe H. Descrieti si clasificati pana la un izomorfim care stabilizeaza H toate structurile de grup * care se pot defini pe E a.i. H este un subgrup in (E, *)* . In [AM2] am dat un raspuns complet la acesta problema: pentru rezolvarea ei am introdus un nou produs la nivel de grupuri, pe care l-am numit *produs unified*, a.i. produsul crossed al lui Schreier si produsul bicrossed al lui Takeuchi sunt cazuri speciale ale sale. Produsul unified este asociat unui grup H si unei noi structuri algebrice (S, *), in care * este o multiplicare pe S (S este o *fibra* in 1 a unei surjectii) care admite o unitate, orice element este inversabil la stinga dar conditia de asociativitate pe S este deformata de un cociclu f si o actiune la dreapta a lui H pe S. Am demonstrat ca orice structura de grup pe multimea E care contine pe H ca subgrup este izomorfa cu un produs unified si am clasificat pana la un izomorfism ce stabilizeaza H toate produsele unified. Acestea sunt clasificate de o multime *coomologica* H^2 (H, S) care va juca rolul celui de al doilea grup de coomologie pentru problema extinderilor a lui Holder. Ca si consecinte o teorema generala de tip Schreier este obtinuta si un raspuns la o problema recenta a lui Kuperberg este dat. Mentionam totodata ca aceasta constructie este intim legata si de o problema celebra si de mare actualitate din geometria diferentiala: existenta *hidden symmetries* pentru un H-fibrat principal (H este un grup Lie) la care furnizam raspunsul in cazul varietatilor 0-dimensionale, i.e. multimi discrete. Articolul [AM2] are un potential de dezvoltare mare in multe domenii ale matematicii si acestea fost scrise in detaliu in ultima sectiune a articolului.

[AM3] este un articol care raspunde tot la **problema 1a) din primul obiectiv**. Avind [AM1] ca fundament, am construit produsul unified la nivel de grupuri cuantice in articolul [A.L. Agore, G. Militaru]: *Extending Structures II: The Quantum Version,* <u>Journal of Algebra</u>, Vol. 336 (2011), 321 – 341. Aici produsul unified pentru algebre Hopf este construit din punctul de vedere al factorizarii: o algebra Hopf E este izomorfa cu un produs unified intre A si H daca si numai daca E factorizeaza prin sublgebra Hopf A si subcoalgebra H. [AM3] abordeaza produsul unified din punctul de vedere dual, al extinderilor split de algebre Hopf. Mai precis am demonstrat o noua teorema structurala: o algebra Hopf E este izomorfa cu un produs unified intre A si H daca si numai daca exista un morfism de algebre Hopf i: A → E, care are o retracta care este morfism de coalgebre, de A-module stingi si este normala in sensul lui Andruskiewitsch si Devoto. In fapt produsul unified furnizeaza un raspuns la o problema naturala daca o privim la nivel categorical: aceea de a descrie complet split monomorfismele in sens relativ dintr-o categorie C data. Legatura dintre produsul unified pentru algebre Hopf si celebrul biprodus Radford este demostrata prin furnizarea unui criteriu necesar si suficient ca extinderea naturala a produsului unifed sa spliteze ca morfism de algebre Hopf. Ca si concecinta o noua metoda de a construi produse unified este propusa si un exemplu concret este construit folosind un set minimal de date de pornire: un grup, o multime punctata pe care actioneaza grupul si o aplicatie de *tranzitie* intre grup si multimea punctata.

Articolele [ACM4] si [ACM5] furnizeaza primele raspunsuri la **problema 2b)** din al **doilea obiectiv** al proiectului. Daca ar fi sa fac o ierarhie a celor mai frumoase rezultate obtinute in peste 20 de ani de cercetare, atunci teorema principala din [ACM4] ar fi cu singuranta in primele trei. Explicatie: algebra necomutativa s-a nascut in jurul studiului algebrelor finit dimensionale centrale simple avind ca parinti pe Frobenius, Wedderburn, Artin, Albert, Brauer, etc. Grupurile cuantice au cunoscut un moment de revolutie odata cu introducerea categoriilor braided de Joyal si Street prin caracterul unificator pe care il joaca si implacatiile profunde in fizica, teoria nodurilor, Kac-Moody algebre sau quantum field theories, etc. Rezultatul principal din [ACM4] stabileste o punte de legatura surprizatoare intre conceptual clasic de algebra centrala simpla ce tine de inceputurile algebrei si conceptual modern de categorii braided. Mai precis am demostrat urmatoarea teorema: o algebra finit dimensionala A este central simpla daca si numai daca categoria monoidala a A-bimodulelor este braided. In continuare rezultatul este echivalent cu existenta unui (unic!) element R in A\otimes A\otimes A care verifica un set de axiome naturale si relativ elementare. O astfel de pereche (A, R) am numit-o algebra quasitriangulara. Rezultatul a fost formulat la un nivel mai general lucrind peste inele commutative – in aces caz conceputul de algebra central simpla este luat de algebrele Azumaya. Existenta unui braiding (daca exista acesta unic si este o simetrie) pe categoria de A-bimodule este in sine un fenomen surprinzator deoarece pana si banala aplicatie flip (m, n) → (n, m), care e bridingul canonic pentru k-module pentru un inel comutativ k, nu doar ca nu este braiding dar nici macar nu este corect definita in cazul necomutativ. Algebrele quasitriangulare (A, R) introduse generalizeaza pe de o parte conceptul de algebra centrala simpla (in cazul finit dimensional conceptele coincid) dar si pe cel de algebra Azumaya. Cazul comutativ este si el surprinzator: o algebra comutativa este quasitriangulara daca si numai daca morfismul structural de algebra este epimorfism (in sens categorical) si in acest caz R este trivial. Pentru orice algebra quasitriangulara (A, R), am construit o familie noua de solutii la celebra ecuatie cuantica Yang-Baxter. [ACM5] continua studiul inceput: teorema principala furnizeza sase descrieri echivalente ale centrului Drinfel'd a categoriei monoidale de A-bimodule. Printre aceste descrieri mentionam trei care sunt deosebite: categoria de descent necomutativ Grothendieck, categoria de coreprezentari peste coringul canonic Sweedler si categoria de module cu conexiuni plate din geometria diferentiala necomutativa. Fiind centrul unei categorii monoidale toate aceste categorii sunt categorii braided: prin urmare pe aceste categorii se pot face majoritatea constructiilor care exista pentru varietati diferentiabile.

In cadrul acestei etape Sebastian Burciu a lucrat la **problema 2e)** din al **doilea obiectiv** al proiectului privind centralizatorul Mueger pentru categoriile de fuziune braided. S-a studiat in special centralizatorul Mueger pentru categoria de reprezentari a dublurilor cuantice semisimple. Rezultatele obtinute pina acum de Sebastian Burciu alcatuiesc scopul unui viitor articol [SB1] “Mueger centralizers for the category of representations of a semisimple Drinfeld double” care va fi in curand trimis spre publicare. Centralizatorul Mueger al unei subactegorii de fuziune D este definit ca fiind subcategoria de fuziune generata de toate obiectele simple X ale lui C care comuta cu orice obiect simplu Y din subcategoria D, adica compozitia braidingurilor de pe XY si YX este identitatea. Centralizatorul Mueger este un instrument esential in demonstratia faptului ca doua categorii de fuziune sunt Morita echivalente daca si numai daca centrele sale Drinfeld sunt echivalente ca braided categorii. El este analog notiunii de spatiu orthogonal in teoria grupurilor metrice (care admit o forma patratica q). De exemplu, pentru o forma patratica q centralizatorul Mueger al unui subgrup H coincide cu subgrupul ortogonal al lui H in raport cu q. Folosind notiunea de centralizator introdusa de Mueger, Bruguieres a reusit sa dea conditii necesare si suficiente pentru ca o categorie braided premodulara sa admita o modularizare. Reaminitm ca notiunea de categorie modulara este un instrument esential in definirea teoriei conforma a campurilior in cazul cuantic (quantum field theory). O alta importanta a centralizatorului Mueger este ca asemenea grupurilor patratice centralizatorul este folosit in descompunerea categoriilor de fuziune in produse directe de categorii. In prezent, in literatura de specialitate nu exista o formula generala pentru centralizatorul unei subcategorii de fuziune.

Fie A o algebra Hopf semisimpla factorizabila. Atunci categoria sa de reprezentari Rep(A) este o categorie braided monoidala. In plus centralizatorul Mueger satisface D''=D pentru orice subcategorie de fuziune D a lui Rep(A). O subcategorie de fuziune a lui Rep(A) este in general de forma Rep(A//L) pentru o anumita subalgebra coideal normala a lui A. Atunci aplicand centralizatorul Mueger se obtine ca Rep(A//L)'=Rep(A//L') pentru o alta subalgebra coideal normala L' a lui A. Scopul principal al acestei probleme este de a identifica legatura care exista intre subalgebrele coideal L si L'.

Rezultatele obtinute pina acum in [SB1] raspund la aceasta problema in cazul A=D(H). Este cunoscut ca in acest caz D(H) este factorizabila si categoria Rep(D(H)) este o categorie tensoriala modulara. Lucrand in acest caz am reusit sa identificam subalgebra coideal L' in cazul cand L este subalgebra Hopf normala a lui A. Este aratat ca de asemenea ca L' trebuie sa fie subalgebra Hopf normala a lui D(H). Pe de alta parte subalgebrele Hopf normale ale lui D(H) sunt clasificate recent de catre S. Burciu si sunt de forma D(K,L,X, ψ) unde K si L sunt subalgebre Hopf normale ale lui H care comuta intre ele. Daca X si ψ sunt triviali atunci se foloseste notatia scurta D(K,L) pentru D(K,L,1,1). In preprintul [SB1] este demonstrata urmatoarea:

Teorema 1: Cu notatiile anterioare avem Rep(A//D(K,H))'=Rep(A//D(H,K)).

Cu alte cuvinte teorema de mai sus implica ca daca L=D(K,H) atunci L'=D(H,K)**.** Ca posibile consecinte a Teoremei 1 de mai sus, aplicatii in clasificarea categoriilor de fuziune modulare sunt de asteptat. Mentionam ca rezultatul din Teorema 1 generalizeza un rezultat recent obtinut de Naidu, Nikshych si Witherspon in IMRN 22/2009. In acest articol este considerat cazul dublului Drinfeld D(G) a unui grup finit G. In acest caz subcategoriile de fuziune ale lui Rep(D(G)) sunt de forma D(K,H,λ) unde K si H sunt subgrupuri normale ale lui G care comuta intre ele, i.e. [K,H]=1 si λ este un bicharacter al produsului direct K x H. Ramane de investigat cazul celorlalte subalgebre Hopf normale D(K,L, X, ψ) ale lui D(H) in care X is ψ nu sunt triviali.

S-au facut de asemenea progrese importante si in studiul **problemei 2d)** din al **doilea obiectiv** al proiectului. Impreuna cu A. Bruguieres a fost demonstrata o teorema de caracterizare a functorilor tensoriali normali in functie de relatiile de echivalenta a constitutentilor. Aceasta relatie de echivalenta este definita asemanator celei date de Rieffel pentru cazul extinderilor de algebre finit dimensionale. Impreuna cu S. Natale a fost inceput un proiect care printre altlele studiaza functorul "uituc" C^G → C. O formula pentru adjunctul sau Ind este data in cadrul acestui proiect si aceasta permite descrierea tuturor obiectelor simple ale lui C^G precum si subcategoriile sale de fuziune.

(max 5 pagini)

Director proiect,

Prof. dr. Gigel Militaru