

Raport stiintific sintetic

privind implementarea proiectului in etapa 2014

Titlul si echipa proiectului: *Algebre Hopf si teme inrudite*, contract 88/05.10.2011. Echipa: director de proiect (prof. dr. Gigel Militaru) , doi cercetatori cu experienta, un tanar cercetator post-doctorand, un tanar cercetator doctorand.

Abstract raport stiintific: In etapa 2014 au fost publicate/acceptate 8 articole, toate in reviste cotate ISI, astfel: 7 articole publicate (unul din ele, [2], este publicat deja on-line) iar un articol, [1], a fost acceptat fiind in curs de productie. Toate articolele mentioneaza finantarea din proiect si raspund la problemele de cercetare ale celor doua obiective ale proiectului. Alte 5 articole stiintifice sunt trimise spre publicare. Rezultatele obtinute au fost diseminate de membrii proiectului prin 3 prezentari orale la conferinte internationale.

Rezumatul rezultatelor stiintifice obtinute: Am sa folosesc numerotarea (nr. crt.) asa cum sunt enumerate articolele pe pagina web a proiectului corespunzator etapei 2014.

Articolul [1] (*Compositio Math.*), ce contribuie la realizarea obiectivului II, problema 2b), trateaza existenta unei dualitati intr-o categorie de reprezentari ale algebrelor Lie current, de tipul celei descoperite de Bernstein-Gelfand-Gelfand in cazul categoriei O asociate unei algebre Lie semisimple. Interesul in teoria reprezentarii pentru algebrele Lie current a originat in contextul studiului teoriei reprezentarii pentru algebra anvelopanta cuantica asociata unei algebre Lie de tip afin, acestea fiind exemple importante de algebre Hopf. Rezultatul principal (conjecturat de Chari in 2011) stabileste egalitatea dintre multiplicitatea unui obiect simplu intr-un (sir de compozitie al unui) modul Weyl local si multiplicitatea unui modul Weyl global in (un sir de compozitie pentru) acoperirea proiectiva a unui obiect simplu. Acest rezultat arata caracterul canonic din punct de vedere categorical al modulelor Weyl (locale si globale), ale caror definitie nu are un caracter canonic. In principiu, categoria de interes este categoria reprezentarilor finit dimensionale pentru algebra anvelopanta cuantizata a unei algebre Lie (Kac-Moody) affine. Studiul acestei categorii a fost redus (datorita mai multor contributii in ultimii 10 ani) la studiul categoriei de module ponderate graduate ce au componentele omogene finit dimensionale, pentru asa numitele algebre Lie current. In [1] identificam aceasta categorie cu categoria modulelor ponderate pentru algebra parabolica maximala speciala a unei algebre Lie affine. Multe dintre modulele binecunoscute in literatura a fi idecompozabile, dar nu si simple, cum ar fi modulele Kirilov-Reshetikhin, sunt obiecte in aceasta categorie. Caracterele modulelor Weyl (locale si globale) sunt identificate cu limite de polinoame Macdonald. Reciprocitatea BGG devine astfel o identitate intre produse scalare de polinoame Macdonald, iar identitatea este dedusa din proprietatile de ortogonalitate ale polinoamelor Macdonald.

Articolul [2] (*Int. Math. Res. Notices*), contine multe dintre rezultatele tehnice necesare in articolul [1] si contribuie deasemenea la realizarea obiectivului II, problema 2b). In particular in [2], teoria modulelor Weyl locale si globale este construita pentru algebrele current twistate. Incercari de a extinde teoria modulelor Weyl in acest context exista in literatura, insa rezultatele existente pana in prezent esueaza in a construi o astfel de teorie pentru in cazul algebrelor twistate de tip $A^{(2)}_{2n}$, care este cel mai complex exemplu de astfel de algebre. Dificultatea, in acest caz, consta in faptul ca noi fenomene apar datorita faptului ca aceasta algebra contine subalgebre de rank 1 de un tip de izomorfism nou. In [2] construim o teorie care functioneaza uniform in toate cazurile. Ca in [1], principalul avantaj conceptual este realizarea algebrelor current twistate ca algebre parabolice in algebre Lie affine twistate. Principala contributie tehnica este o varianta a asa-numitei "Garland lemma" pentru algebra Lie de tip $A^{(2)}_2$. In obtinerea acestui rezultat folosim in mod crucial structura bazelor PBW pentru algebrele Lie de acest tip. Din acest punct de vedere, [2] contribuie de asemenea la realizarea obiectivului II, problema 2c). Un alt rezultat important obtinut in [2] este faptul ca modulele Weyl globale sunt module libere peste o anumita algebra polinomiala, ceea ce arata, in particular, ca toate modulele Weyl locale cu aceeasi pondere maximala au aceeasi dimensiune. Un al treilea rezultat obtinut in [2] este caracterizarea modulelor Weyl locale speciale ca module Demazure. Este de remarcat ca acest rezultat este valabil uniform in cazul algebrelor current twistate dar nu si in cazul algebrelor current clasice (ne-twistate).

Articolul [3] (*Journal of Mathematical Physics*), ce contribuie la realizarea obiectivului II, problema 2b), studiaza categoria de algebre Poisson Hopf. O algebra Poisson Hopf este o algebra Hopf ce admite o structura de algebra Poisson astfel incat comultiplicarea si counitatea sunt morfisme de algebre Poisson. Aceste obiecte sunt situate la granita dintre grupuri cuantice si geometria Poisson. Structurile Poisson apar in diverse domenii ale matematicii sau ale fizicii matematice precum geometria diferentiala, mecanica clasica si cea cuantica, grupuri Lie si teoria reprezentarii, geometria algebrica etc. Articolul [3] studiaza proprietati categoricale ale algebrelor Poisson Hopf si ale bialgebrelor Poisson. Este introdusa constructia analoaga algebrei Hopf libere a lui Takeuchi in contextual algebrelor Poisson Hopf. Mai precis, se arata ca exista o algebra Poisson Hopf libera peste orice coalgebra sau, echivalent, ca functorul uituc de la categoria algebrelor Poisson Hopf la categoria coalgebrelor are adjunct la stanga. In particular, se arata ca categoria algebrelor Poisson Hopf este o subcategorie reflectiva a categoriei biagebrelor Poisson. De asemenea, sunt descrise coprodusele si coegalizatorii in categoria algebrelor Poisson Hopf, aratand astfel ca aceasta categorie este cocompleta.

Articolul [4] (*Linear Algebra and its Applications*) se încadrează în obiectivul I, problemele 1a) și 1b) și tratează problema clasificării complementelor (PCC) în contextual algebrelor asociative. Fie $A \subset E$ o extindere de algebre. Dacă X este un A -complement dat atunci putem descrie toți complementii lui A în E astfel: orice A -complement al lui E este izomorf cu o r -deformare a lui X . Cu alte cuvinte, exact ca în cazul algebrelor Hopf, Lie sau Leibniz, având un A -complement X al lui E , toți A -complementii lui E sunt deformări ale algebrei X prin aplicații $r : X \rightarrow A$ asociate perechii potrivite canonice a factorizării $E = A + X$. Raspunsul teoretic la (PCC) este dat explicit prin construirea unui obiect de tip coomologic $HA^2(X, A) (\triangleleft, \triangleright, \leftarrow, \rightarrow)$ ce parametrizează toți A -complementii lui A în E . Este introdus indexul de factorizare $[E : A]^f$ al unei extinderi $A \subset E$ ca fiind cardinalul claselor de izomorfism ale tuturor A -complementelor lui E . Mai exact, se arată că indexul de factorizare se poate calcula după formula $[E : A]^f = |HA^2(X, A) (\triangleleft, \triangleright, \leftarrow, \rightarrow)|$. Articolul se încheie cu numeroase exemple concrete. Mai precis, sunt indicate extinderi de algebre asociative al căror index este 1-3 precum și o extindere al cărei index de factorizare este cel puțin 4.

Articolul [5] (*Symmetry Integr. Geom.*) se încadrează în obiectivul I, problema 1a), și este o continuare a articolului A.L. Agore, G. Bontea, G. Militaru, *Classifying coalgebra split extensions of Hopf algebras*, *J. Algebra App.* 12 (2013), 1 – 24. Mai precis, folosind abordarea computațională introdusă în articolul mai sus menționat, sunt clasificate toate extinderile care splittează în categoria coalgebrelor ale algebrei Hopf a lui Sweedler H_4 prin algebra Hopf grupală a grupului ciclic de ordin n , $k[C_n]$, i.e. toate algebrele Hopf care se potrivesc într-un sir exact $H_4 \mapsto E \xrightarrow{\pi} k[C_n]$ astfel încât $\pi : E \rightarrow k[C_n]$ splittează ca morfism de coalgebre și $H_4 \cong E^{co(k[C_n])}$. Echivalent, sunt clasificate toate produsele crossed de algebre Hopf $H_4 \# k[C_n]$ prin calculul explicit a două obiecte: grupul coomologic $H^2(k[C_n], H_4)$ și $\text{Crp}(k[C_n], H_4) :=$ mulțimea tipurilor de izomorfism ale tuturor produselor crossed $H_4 \# k[C_n]$. Primul pas îl constituie calculul tuturor sistemelor crossed de algebre Hopf $(H_4, k[C_n], \triangleright, f)$ și descrierea produselor crossed corespunzătoare. Sunt demonstrate rezultate de clasificare concrete. Mai precis, toate produsele crossed $H_4 \# k[C_n]$ sunt descrise prin generatori și relații și clasificate: acestea sunt grupuri cuantice $4n$ -dimensionale $H_{4n, \lambda, t}$, parametrizate de mulțimea tuturor perechilor (λ, t) , unde $\lambda : C_n \rightarrow C_2$ este o aplicație unitară arbitrară și o rădăcină de ordin n , notată λ , a lui ± 1 . Ca o aplicație, grupul de automorfisme ale algebrelor Hopf este descris explicit.

Articolul [6] (*Linear and Multilinear Algebra*) furnizează răspunsuri la problema 1a) din primul obiectiv precum și problema 2b) din al doilea obiectiv la nivel de algebre Leibniz (algebre Lie 'necomutative'). Fie G o algebra Leibniz, E un spațiu vectorial și $p : E \rightarrow G$ un epimorfism de spații vectoriale. Rezultatul principal din [6] descrie și clasifică toate structurile de algebra Leibniz care se pot defini pe E astfel încât p să devină un morfism de algebre Leibniz. În acest fel obținem un răspuns teoretic la ceea ce am numit 'global

extension problem' ca duala a problemei 'extending structures problem' din primul obiectiv al proiectului. Toate aceste structuri sunt clasificate de un obiect global de coomologie pe care l-am construit explicit si am demonstrat ca el este un coprodus al tuturor 'grupurilor' de coomologie (neabeliana) 'locala' in care reprezentarile algebrei Leibniz joaca un rol cheie. In particular, grupul classic de coomologie Loday si Pirashvili este cea mai elementara piesa dintre componentele acestui obiect global de clasificare. Diverse aplicatii sunt obtinute la nivel de algebre Leibniz co-flag sau metabeliene. Calcularea explicita a acestor obiecte de clasificare este o problema vasta si tentanta pentru studiu in anii urmasori cu atat mai mult cu cit lipseste masinaria unei coomologii clasice.

Articolul [7] (*Symmetry Integr. Geom.*) continua investigatia inceputa in articolele A.L. Agore, G. Militaru, "Classifying complements for Hopf algebras and Lie algebras", *J. Algebra* 391 (2013) si respectiv A.L. Agore, G. Militaru, "Extending structures for Lie algebras", *Monatshefte fur Mathematik* 174 (2014), in legatura cu problema de factorizare la nivel de algebre Lie si reciproca acesteia, problema de clasificare a complementilor. Punctul de pornire al acestui articol il constituie un rezultat din cel de-al doilea articol mentionat mai sus care descrie toate structurile de algebre Lie L care contin o algebra Lie data h ca subalgebra de codimensiune 1 peste un corp arbitrar k : multimea tuturor acestor algebrelor Lie L este parametrizata de spatiul $\text{TwDer}(h)$ tuturor 'twisted' derivarilor lui h . Pentru o algebra Lie perfecta h , sunt clasificate toate algebrele Lie ce contin h ca si subalgebra de codimensiune 1. De asemenea, grupul de automorfisme al acestor algebre Lie este complet determinat ca subgroup al produsului semidirect dintre h si $(k^* \times \text{Aut}_{\text{Lie}}(h))$. In cazul algebrelor Lie simpatetice h , se arata ca, pana la un izomorfism, exista o singura algebra Lie care contine h ca si algebra Lie de codimensiune 1, si anume produsul direct dintre h si algebra Lie abeliana. Mai mult, grupul de automorfisme $\text{Aut}_{\text{Lie}}(k_0 \times h) = k^* \times \text{Aut}_{\text{Lie}}(h)$. In cazul non-perfect clasificarea acestor algebre Lie reprezinta o problema dificila. Fie $l(2n + 1, k)$ algebra Lie cu bracket-ul dat de $[E_i, G] = E_i$, $[G, F_i] = F_i$, pentru orice $i = 1, \dots, n$. Sunt descrise explicit toate algebrele Lie ce contin $l(2n + 1, k)$ ca o subalgebra de codimensiune 1 calculand toate produsele bicrossed $k \triangleright \triangleleft l(2n + 1, k)$. Acestea sunt parametrizate de o anumita multimea de matrici $M_n(k)^4 \times k^{2n+2}$ care este explicit determinata. Sunt descrise anumite deformari de tip pereche potrivita ale algebrei Lie $l(2n + 1, k)$ pentru a calcula indexul de factorizare al unor extinderi de tipul $k \subset k \triangleright \triangleleft l(2n + 1, k)$. Este indicat un exemplu de astfel de extindere de index de factorizare infinit. Articolul se termina cu o problema deschisa, analoaga unui rezultat demonstrate de curand de autori in cazul grupurilor.

Articolul [8] (*J. Algebra Appl.*) descrie subalgebrele coideal stangi sau drepte ale unei extinderi cocentrale abeliene de algebre Hopf peste un corp algebric inchis de caracteristica zero (asa numitele "Kac algebras"). Rezultatele acestui articol se incadreaza in studiul problemelor 1c) si 2d) din cadrul obiectivelor I si II ale proiectului. Este binecunoscut deja,

printr-un rezultat al S. Natale ca extinderile cocentrale dau nastere la categorii de fuziune echivariantizate. De asemenea este cunoscut ca subcategoriile de fuziune ale unei categorii de reprezentari a unei algebre Hopf semisimple sunt descrise de subalgebrele coideal stangi (sau drepte) inchise la actiunea adjuncta stanga sau dreapta. Descrierea data mai sus a subalgebrelor coideal arata ca orice subcategorie de fuziune a unei equivariantizari de categorii pointed este de asemenea echivariantizare de categorii pointed. De asemenea aceasta descriere permite formularea unei conjecturii de tip Wall (vezi R. Guralnick and F. Xu "On a subfactor generalization of Wall's conjecture" Journal of Algebra, 332, (1), 2011, 457-468.) pentru algebrele Hopf semisimple. In plus articolul da un raspuns afirmativ acestei conjecturi in cadrul extinderilor abeliene cocentrale peste corpul numerelor complexe.

Articole stiintifice trimise spre publicare: In acest moment membrii proiectului de cercetare au trimise spre publicare urmatoarele articole stiintifice, toate trimise catre reviste cotate ISI si abordeaza probleme din obiectivele proiectului - fisierele sunt disponibile pe <http://arxiv.org/archive/math>

G. Militaru – *Metabelian associative algebras and bilinear forms*

A.L. Agore, G. Militaru - *Ito's theorem and metabelian Leibniz algebras*

A.L. Agore, G. Militaru - *Jacobi and Poisson algebras*

A.L. Agore, G. Militaru – *The extending structures problem for algebras*

A.L. Agore, G. Militaru – *The global extension problem, crossed products and co-flag non-commutative Poisson algebras*

11.11.2014

Director proiect,
Prof. dr. Gigel Militaru