Inversa unei funcții

Alexandru Daniel Pîrvuceanu *

22 octombrie 2020

Problemă. Să se determine inversa funcției $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, g(m,n) = 1 + 2 + ... + (m+n) + m$.

Soluție. Este clar că $g(m,n) = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + m, \forall (m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Pentru $n \in \mathbb{N}$ arătăm ca $\exists ! (x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ astfel încât $g(x,y) = n \iff n = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + x$.

Notăm $s := x + y$, $t := \frac{s(s+1)}{2}$. De aici avem $s^2 + s - 2t = 0$, iar cum $s \geq 0$ găsim $s = \frac{\sqrt{8t+1}-1}{2}$.

Avem $t \leq n = t + x < t + s + 1 = \frac{s^2+3s+2}{2}$, de unde $8t+1 \leq 8n+1 < 4s^2+12s+9 = (2s+3)^2 \implies \frac{\sqrt{8t+1}-1}{2} \leq \frac{\sqrt{8n+1}-1}{2} < s+1 \iff s \leq \frac{\sqrt{8n+1}-1}{2} < s+1$. De aici, $s = \left[\frac{\sqrt{8n+1}-1}{2}\right]$.

Obținem acum $t = \frac{s(s+1)}{2} = \frac{\left[\frac{\sqrt{8n+1}-1}{2}\right]\left(\left[\frac{\sqrt{8n+1}-1}{2}\right]+1\right)}{2}$, iar apoi

$$x = n - t = n - \frac{\left[\frac{\sqrt{8n+1}-1}{2}\right]\left(\left[\frac{\sqrt{8n+1}-1}{2}\right]+1\right)}{2}$$

$$y = s - x = \left[\frac{\sqrt{8n+1}-1}{2}\right] + \frac{\left[\frac{\sqrt{8n+1}-1}{2}\right]\left(\left[\frac{\sqrt{8n+1}-1}{2}\right]+1\right)}{2} - n = \frac{\left[\frac{\sqrt{8n+1}-1}{2}\right]\left(\left[\frac{\sqrt{8n+1}-1}{2}\right]+3\right)}{2} - n.$$

Așadar, $g^{-1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}, g^{-1}(n) = \left(n - \frac{\left[\frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2}\right] \cdot \left(\left[\frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2}\right]+1\right)}{2}, \frac{\left[\frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2}\right]\left(\left[\frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2}\right]+3\right)}{2} - n\right)$.

*Student, Facultatea de Matematică și Informatică, Universitatea din București