EXAMEN, ALGEBRĂ I, 3 FEBRUARIE 2021

Puteti folosi, fară demonstraţie (dar enunţat!), orice rezultat din curs sau seminar. Timp de lucru 2 ore. *1 punct se acordă din oficiu. Succes!*

Exercitiul 1: (a) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Arataţi că f nu este surjectiva si calculaţi $f^{-1}\big((1, 3)\big)$ si $f\big((1, 3)\big)$, unde $(1, 3)$ este intervalul deschis din $\mathbb{R}$. (1 punct)

(b) Pe mulţimea $\mathbb{R}$ definim relaţia: $x \approx y \Leftrightarrow x^2 + 4y = y^2 + 4x$. Arataţi ca: $\approx$ este o relaţie de echivalenţa pe $\mathbb{R}$, calculaţi clasele de echivalenţa, arataţi ca $\mathbb{R}/\approx\, \cong [-1, +\infty)$ si indicaţi doua sisteme de reprezentanţi ai relaţiei $\approx$. (1,5 puncte)

Exercitiul 2: Fie permutarea

$$\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 7 & 9 & 1 & 10 & 11 & 12 & 6 & 13 & 8 \end{smallmatrix}\right) \in S_{13}$$

(a) Descompuneţi permutarea σ în produs de cicli disjunţi, în produs de transpoziţii şi determinaţi signatura permutării σ. (1 punct)

(b) Determinaţi ordinul permutării σ si calculaţi σ^{28}. (1 punct)

(c) Găsiţi soluţiile ecuaţiei $x^2 = \sigma$ în grupul S_{13}. (0,5 puncte)

Exercitiul 3: Fie $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ produsul direct al grupurilor ciclice $(\mathbb{Z}_2, +)$ si $(\mathbb{Z}_4, +)$.

(a) Calculaţi ordinele elementelor grupului G. (0,5 puncte)

(b) Arătaţi că grupul G nu este izomorf cu grupul $(\mathbb{Z}_8, +)$ si nici cu produsul direct de grupuri $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. (1 punct)

(c) Fie $H = \{(\hat{0}, \bar{0}),\, (\hat{0}, \bar{2})\}$. Arătaţi că H este subgrup normal in G si exista un izomorfism de grupuri $G/H \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. (1 punct)

Exercitiul 4: Fie R multimea tuturor matricilor de forma

$$R := \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{C}\}$$

(a) Arataţi că R este un subinel in inelul matricilor $M_2(\mathbb{C})$ si calculaţi elementele nilpotente si elementele idempotente din inelul R. (1 punct)

(b) Arataţi că $I := \{\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{C}\}$ este un ideal bilateral in R si exista un izomorfism de inele $R/I \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. (1 punct)

(c) Descrieţi grupul elementelor inversabile din inelul R. (0,5 puncte)