NOTE DE CURS

prof. dr. GIGEL MILITARU
gigel.militaru@fmi.unibuc.ro

Algebra, anul I, semestrul 1. Programa detaliata a cursului.

Istoric al dezvoltării algebrei. Probleme care au condus la dezvoltarea algebrei (ecuaţii algebrice peste **Z, Q, R, C**; extinderea mulţimilor de numere).

Mulţimi, operaţii cu mulţimi. Funcţii. Compunerea funcţiilor. Funcţii injective, surjective, bijective. Mulţimi numărabile. Relaţii de echivalenţă: exemple, verificare de proprietăţi, descrierea claselor de echivalenţă şi a mulţimii factor. Proprietatea de universalitate a mulţimilor factor. Relatii de ordine.

Legi de compoziţie. Monoizi. Grupuri. Morfisme de grupuri. Grupuri izomorfe. Produs direct de grupuri. Subgrupuri: exemple. Nucleul şi imaginea unui morfism de grupuri. Teorema de corespondenţă pentru subgrupuri. Subgrupul generat de o submulţime a unui grup.

Relaţii de echivalenţă pe un grup în raport cu un subgrup. Teorema lui Lagrange, ordinul unui element: aplicaţii. Subgrup normal. Grup factor: exemple. Proprietatea de universalitate a grupurilor factor. Teorema fundamentală de izomorfism pentru grupuri. Clase speciale de grupuri: grupuri ciclice; grupuri de izometrii; grupul diedral; grupul cuaternionilor. Grupuri de permutări. Signatura unei permutări, transpoziţii. Descompunerea unei permutări ca produs de cicluri disjuncte şi ca produs de transpoziţii.

Inele. Produs direct de inele. Inele de matrice. Elemente inversabile, nilpotente, idempotente. Subinele. Ideale într-un inel comutativ. Idealul generat de o submulţime. Morfisme de inele. Inel factor, proprietatea de universalitate a inelului factor. Teorema fundamentală de izomorfism pentru inele.

Corpuri, subcorpuri, caracteristica unui corp. Corpul fracţiilor unui domeniu de integritate. Corpul cuaternionilor.

Bibliografie:

1. I. D. Ion şi N. Radu, *Algebra*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1991.

2. C. Năstăsescu, C. Niţă şi C. Vraciu, *Bazele algebrei*, Ed. Academiei, Bucureşti, 1986.

3. T. Dumitrescu, *Algebra*, Ed. Universităţii din Bucureşti, 2006.

4. D.S. Dummit şi R.M. Foote, *Abstract Algebra*, third edition, Wiley and sons, 2004.

5. I. D. Ion, C. Niţă, D. Popescu, N. Radu, *Probleme de algebră*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.

6. C. Băeţica, C. Boboc, S. Dăscălescu, G. Mincu, *Probleme de algebră*, Ed. Univ. Bucureşti, 2008.

Chestiuni organizatorice

1) Cum vom acorda nota.

1) **Nota seminar** := fiecare student va intra în examenul final cu o nota/punctaj din timpul anului maxim 2 puncte. Ea e dată la seminar din: a) activitatea din timpul anului; b) minim o lucrare scrisă la mijlocul semestrului; c) susținerea unor prelegeri/referate pe teme date; d) rezolvări de probleme dificile.

2) **Nota examen**: Vor fi 4 subiecte de examen scris fiecare cu 2,5 puncte (4 probleme la examen on-line / 3 probleme + 1 subiect de teorie la examen f2f).

3) Nota finală := suma punctelor de la seminar și examenul scris (ea este ≤ 12 și nu se acordă punctaj din oficiu)

2) Resurse on-line

- Moodle - FMI / Moodle - UB
- E-mail : gigel.militaru@fmi.unibuc.ro
  gigel.militaru@unibuc.ro
- Grupul de facebook : "Algebră - Cursurile mele predate în FMI", pentru comunicare rapidă.
- Blog : gigelmilitaru.wordpress.com. ("Noncommutative Algebra"). Aici voi posta notele de curs / problemele de seminar.
- Canalul meu de youtube : vom posta înregistrarea cursurilor / seminariilor.
- O să folosim zoom, MS Teams, Skype, ...

3) Important : vă stau la dispoziție în orice zi! Mă puteți întreba orice nelămurire sau cere ajutor la orice problemă legată de curs / seminar. Nu ezitați să faceți asta! Mă puteți întreba pe e-mail sau facebook sau moodle-FMI.

SONDAJ facultativ! Studenții care doresc îmi pot trimite pe e-mail răspunsuri la următoarele întrebări: (gigel.militaru@unibuc.r

a) media de admitere / media generală din liceu la matematică.

b) Ce înseamnă pentru tine matematica și de ce ai ales să studiezi la FMI

c) Ce așteptări ai și cum ți-ai dori să fie acest curs/seminar?

d) Ce vreți să faceți după terminarea facultății?

ISTORIC AL DEZVOLTARII ALGEBREI

Al-Horezmi

Algebra ("al-jabr", ≃ algoritm; Muhammad al Khwarzmi, 830, o carte despre rezolvarea ecuatiilor de gradul 1 și 2) are o vechime de peste 4000 de ani fiind una din cele mai vechi domenii ale științei. Până în secolul XIX se mai numea și identifica cu numele de "teoria ecuațiilor" pentru ca principala / singura sursă a ei a fost rezolvarea ecuațiilor de forma:

$$P(x) = 0 \qquad (1)$$

unde $P \in \mathbb{R}[X]$ este un polinom cu coeficienți reali.

- rezolvarea ecuațiilor liniare (de gradul 1) de forma

$$ax + b = 0, \quad a \neq 0, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

sau a ecuațiilor de gradul doi (pătratice)

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

erau cunoscute de babilonieni cu 4000 de ani în urmă. Concret, o tabletă scrisă în piatră în anul 1700 î. Hr. rezolva ecuația

$$x^2 - x = 870 \quad !$$

Babilonienii scriau numerele în baza 60!

A altă tabletă a lor din anul 1854 î. Hr. calcula toate pătratele n^2 (cu $n \leq 59$) și cuburile n^3 ($n \leq 32$). Foloseau aceste tablete pentru a rezolva ecuații de forma

$$a x^3 + b x^2 = c \quad , \quad a, b \neq 0 \qquad (2)$$

într-un mod extrem de ingenios pentru acele vremuri: Babilonienii au observat, de exemplu, că ecuația (2) este echivalentă cu:

$$\left(\frac{ax}{b}\right)^3 + \left(\frac{ax}{b}\right)^2 = \frac{ca^2}{b^3} \qquad (3)$$

Făcând substituția $y := \frac{ax}{b}$ ecuația (3) devine $y^3 + y^2 = \frac{ca^2}{b^3}$, și asta explică de ce calculau $n^3 + n^2$ ($n \leq 32$).

In mod cert, ca exemplu, ecuația $12x^3 = 3630$ este rezolvată de ei în altă tabletă scrisă acum aprox. 4000 de ani!.

Chiar dacă babilonienii știau să rezolve diverse ecuații de gradul 2 sau 3 nu aveau formulele generale de rezolvare.

- ecuația de gradul doi:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0, \; a, b, c \in \mathbb{R}$$

și scrierea soluțiilor ei sub forma de azi:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (4)$$

au fost obținute mult mai tîrziu de:

- Brahmagupta, 828 d.H
- al-Khwarizmi, 830 d.H., care a rezolvat pur algebric
- Simon Stevin, 1594, a acoperit toate cazurile
- R. Descartes, 1637 a publicat formula (4) așa cum o folosim azi!

- ecuațiile de gradul trei și de gradul patru

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad a \neq 0, \; a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0, \quad a \neq 0, \; + / - \ldots$$

Rezolvările acestor două ecuații este legată de perioada renașterii italiene.

- Dal Ferro ($\simeq$ 1515) este creditat ca primul care a rezolvat complet ecuațiile de gradul trei de forma:

$$x^3 + mx = n, \qquad m, n \in \mathbb{R}$$

dar le-a ținut secrete (!) până la moartea sa în 1526.

Înainte de moarte, Dal Ferro i-a spus "secretul" studentului său Antonio Fior care a început să se laude :) că știe să rezolve ecuațiile de gradul trei.

- Tartaglia (Nicolo of Brescia) a fost provocat la un concurs public de Fior pe tema rezolvării ecuațiilor de gradul trei (rezolvarea a 30 de ecuații în 40 de zile). Tartaglia a câștigat concursul rezolvând toate problemele în două ore! :). ~~Concluzie~~: și Tartaglia știe să rezolve ecuațiile de gradul 3 și se pregătea să publice metoda sa de rezolvare.
- Cardano l-a invitat pe Tartaglia la Milano să îl învețe și pe el să rezolve ecuațiile de gradul trei: Tartaglia a făcut asta dacă îi promite că ține secretul (să nu îl publice) până scrie el cartea.

Cardano i-a promis, dar și-a încălcat promisiunea și a publicat înainte de Tartaglia, în 1545 în "Ars Magna" primul tratat de algebră în limba latină care conținea și rezolvarea ecuațiilor de gradul trei și am avut și primul "furt intelectual" în știință.

Concluzie: folosirea expresiei "formulele lui Cardano", pentru rezolvarea ecuațiilor de gradul trei este injustă și incorectă! Dal Ferro și Tartaglia le știau deja. Cardano le-a luat de la Tartaglia și l-a ... mințit :)

- Ludovico Ferrari (1540), student al lui Cardano, este cel care a rezolvat primul ecuațiile de gradul patru, de forma:

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0,$$

reducând problema la ecuații de gradul trei. Istoria îl creditează pe Ferrari ca primul care a rezolvat ecuația de gradul patru și pe Dal Ferro pentru ecuația de gradul trei.

- Ulterior, Lagrange (1736–1813) a introdus o altă metodă de rezolvare a ecuațiilor de grad ≤ 4, folosind ceea ce azi s.n. "rezolventa Lagrange" care este inclusă în teoria Galois.

- E. Galois (1811–1832) a inițiat o teorie, azi numită "teoria lui Galois" și care, printre altele, este demonstrat că nu orice ecuație de gradul 5 se poate rezolva prin radicali! Tot el a definit conceptul de grup.

Acestea sunt doar câteva nume din preistoria algebrei. Contribuții majore s-au făcut și în Egiptul antic, Grecia Antică, China, India, etc.

Alte nume și contribuțiile lor la algebră:

Al-Karaji (prima demonstrație în care a folosit inducția matematică); Omar Khayyam (a intuit legătura algebră vs geometrie); R. Descartes (a introdus notațiile algebrei moderne și a inventat geometria analitică); F. Viète (relații dintre rădăcini și coeficienți); I. Newton (formula binomului și aproximarea rădăcinilor); Gauss (teorema fundamentală a algebrei); Hamilton (primul corp necomutativ) etc. etc.

Un rol cheie în dezvoltarea algebrei în ceea ce este astăzi l-a avut Universitatea din Göttingen și a minților luminate care au trecut pe aici: Gauss, Dirichlet, Riemann, Dedekind (teoria numerelor), F. Klein, Emmy Noether ("mamă" a algebrei moderne), D. Hilbert, Artin, Brauer, Krull, etc...

Algebra în România:

- 1837, Ghe. Asachi, primul manual de "Algebră".
- 1870, F. Mocnik (traducere): "Cursu elementaru de algebră".
- 1900, B. Ionescu: "Tratatul de algebră elementară"

Ion Barbu (contribuții la teoria corpurilor), G. Moisil, Ionel Bucur, etc..

- Mulțimile de numere : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$

Construcție axiomatică a numerelor naturale $\mathbb{N}$ a fost făcută pentru prima dată de Giuseppe Peano în 1889 astfel.

Definiție Se numește sistem Peano un triplet $(N, 0, s)$, unde N e o mulțime nevidă, $0 \in N$ și $s: N \to N$ este o funcție a.î.

(P1) $s(x) \neq 0$, $(\forall)\, x \in N$

(P2) s este o funcție injectivă.

(P3) Dacă $P \subseteq N$ a.î. $0 \in P$ și $(\forall)\, x \in P$ avem că $s(x) \in P$, atunci $P = N$.

Peano a axiomatizat că există un astfel

de sistem, iar ulterior D. Hilbert și P. Bernays au demonstrat unicitatea sistemelor Peano (până la un izomorfism); este ceea ce se numește "recursion theorem".

Asta e mulțimea numerelor naturale $\mathbb{N}$.
Celelalte mulțimi de numere $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ și $\mathbb{C}$ se construiesc pornind de aici (și le vom face mai târziu după ce introducem relații de echivalență).

- $\mathbb{Z}$ se construiește din $\mathbb{N}$ ca o "mulțime factor" a lui $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
- $\mathbb{Q}$ e o "mulțime factor" a lui $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* /_\sim$.
- $\mathbb{R}$ se construiește din $\mathbb{Q}$ ca o clasă de echivalență de șiruri Cauchy.
- $\mathbb{C}$ se construiește în $\mathbb{R}$ în mod pur algebric.
- In 1841, după 7 ani de cercetare, Hamilton a construit primul corp necomutativ ca extindere finită a lui $\mathbb{C}$, numit corpul cuaternionilor $\mathbb{H}$, i.e. avem incluziunile:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} \subseteq \mathbb{H}$$

- In 1877 F.G. Frobenius a demonstrat un rezultat remarcabil că alte "extinderi" nu mai există; Mai precis, dacă A este o $\mathbb{R}$-algebră finit dimensională peste $\mathbb{R}$ și în care orice element nenul e inversabil $\Rightarrow A \simeq \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sau $\mathbb{H}$.

(pentru detalii vezi "Frobenius theorem (real division algebra)" pe wikipedia sau articolul

[MS]: M. Bresar, V. Shulman: "On, Around, and Beyond Frobenius Theorem on Division Algebras", arxiv.org, 2019)

Teme de referat (o echipă de 2-3 studenți), de expus la seminar

1) The recursion theorem (Hilbert, Bernays)

Referințe: • N. Jacobson, Basic Algebra, Vol 1.

(*) sau • Busneag, Boboc, Piciu: "Aritmetică și teoria numerelor" (free pe net), teorema 1.3.

2) Adunarea și înmulțirea numerelor naturale

Referințe: cartea (*), teoremele 2.1 până la Prop. 3.3.

3) Teorema Frobenius

Referințe: articolul [MS] de mai sus.

4) Metoda Lagrange de rezolvare a ecuațiilor algebrice de grad ≤ 4.

Referințe: C. Năstăsescu, C. Niță: "Teoria calitativă a ecuațiilor algebrice", pg 112 – 119

Rezolvarea ecuațiilor de gradul doi, trei și patru

• <u>ecuația de gradul întâi</u>: $ax+b=0$, $a,b\in\mathbb{R}$

$a\neq 0$ are soluția <u>unică</u> $x=-\frac{b}{a}=-a^{-1}b$.

Afirmația e valabilă dacă înlocuim $\mathbb{R}$ cu orice corp K, $a\in K\setminus\{0\}$, dar <u>nu</u> e valabilă pentru inel.

<u>Exemple</u>: a) Ecuația $\hat{2}x+\hat{1}=\hat{0}$, <u>nu</u> are soluții în $\mathbb{Z}_4=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{3}\}$.

b) Ecuația $\hat{2}x=\hat{0}$ are în $\mathbb{Z}_4$ <u>două</u> soluții $x_1=\hat{0}$, $x_2=\hat{2}$.

• <u>ecuația de gradul doi</u>: $ax^2+bx+c=0$, $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$ are rădăcinile (posibil complexe)

$$\boxed{x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \qquad (1)$$

Formula (1) s.n. <u>formula pătratică</u> (quadratic formula)

<u>Observație</u> Formula (1) <u>nu</u> mai rămâne adevărată în corpul $\mathbb{Z}_2=\{\hat{0},\hat{1}\}$.

Ecuația $x^2+\hat{1}=\hat{0}$, are ca rădăcini în $\mathbb{Z}_2$ pe $x_1=x_2=\hat{1}$, dar <u>nu</u> putem aplica (1) căci $\hat{2}a=\hat{2}\cdot\hat{1}=\hat{0}$, <u>nu</u> e element inversabil în $\mathbb{Z}_2$.

Aplicată "mecanic" formula (1) în $\mathbb{Z}_2$ ar da:

$$x_{1,2}=\frac{0\pm\sqrt{0}}{0} \quad (!).$$

• Rezolvarea ecuației de gradul trei

Forma generală a unei ecuații de gradul trei este :

$$a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0,$$

$a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, $a_3 \neq 0$ (sau complexe).

Împărțim ecuația cu a_3 $\Rightarrow$ ea devine

$$x^3 + \frac{a_2}{a_3} x^2 + \frac{a_1}{a_3} x + \frac{a_0}{a_3} = 0, \text{ i.e.}$$

Pot presupune că ea are forma :

$$\boxed{x^3 + b x^2 + c x + d = 0} \quad (1)$$

cu $b, c, d \in \mathbb{R}$ (pot fi și din $\mathbb{C}$)

• pasul 1 : Facem substituția

$$\boxed{y := x + \frac{b}{3}} \quad (2)$$

Ecuația (1) devine :

$$\left(y - \frac{b}{3}\right)^3 + b\left(y - \frac{b}{3}\right)^2 + c\left(y - \frac{b}{3}\right) + d = 0 \iff$$

$$y^3 + \left(c - \frac{b^2}{3}\right) y + d - \frac{cb}{3} + \frac{2b^3}{27} = 0 \quad (2)$$

Notăm $q := c - \frac{b^2}{3}$, $r := d - \frac{cb}{3} + \frac{2b^3}{27}$

obținem ecuația

$$y^3 + q y + r = 0 \quad (3)$$

<u>Rezumat</u>: ecuația (1) este echivalentă cu ecuația (3), unde $q = c - \frac{b^2}{3}$, $r = d - \frac{cb}{3} + \frac{2b}{27}$

I.e. dacă y_1, y_2, y_3 sunt rădăcini pentru (3)

$\Rightarrow$ $x_i = y_i - \frac{b}{3}$ $(i = 1, 2, 3)$ sunt rădăcini pentru (1) și reciproc.

• <u>Pasul 2</u>: rezolvarea ecuației (3).

<u>Teorema (cubic formula)</u>: Fie $q, r \in \mathbb{C}$. Atunci rădăcinile ecuației $y^3 + qy + r = 0$ sunt:

$$g + h, \quad \varepsilon g + \varepsilon^2 h \quad \text{și} \quad \varepsilon^2 g + \varepsilon h \tag{4}$$

unde $\varepsilon := -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ e rădăcină primitivă de ordinul trei a unității

$$g^3 := \frac{1}{2}\left(-r + \sqrt{R}\right), \quad h := -\frac{q}{3g}, \quad R := r^2 + \frac{4}{27}q^3$$

<u>Demonstrație</u>: Scriem o rădăcină y_1 a lui $f(y) = y^3 + qy + r$ sub forma

$$\underline{y_1 := g + h}, \quad \text{cu } g \text{ și } h \text{ alese ulterior!}$$

Avem că:

$$0 = f(y_1) = f(g+h) = (g+h)^3 + q(g+h) + r$$
$$= g^3 + 3g^2h + 3gh^2 + h^3 + q(g+h) + r$$
$$= g^3 + h^3 + 3gh(g+h) + q(g+h) + r$$

$$= \underline{g^3 + h^3 + (3gh + q)\, y_1 + r}$$

Poanta: dacă $3gh + q = 0 \Rightarrow \underline{gh = -\frac{q}{3}}$.

($\exists$) numerele (posibil complexe) g, h cu

$g + h = y_1$ și $gh = -\frac{q}{3}$

Evident g, h sunt soluțiile ecuației de gradul doi:

$$x^2 - y_1 x + \left(-\frac{q}{3}\right) = 0$$

Această alegere ($\underline{3gh + q = 0}$) implică

$g^3 + h^3 = -r$. Din $gh = -\frac{1}{3} q \Rightarrow$

$$\begin{cases} g^3 h^3 = -\frac{1}{27} q^3 \\ g^3 + h^3 = -r \end{cases}$$

adică g^3 și h^3 sunt soluțiile ecuației de gradul doi

$$t^2 + rt - \frac{1}{27} q^3 = 0.$$ Aplicând formula pătratică $\Rightarrow$

$$g^3 = (t_1) = \frac{1}{2}\left(-r + \sqrt{r^2 + \frac{4}{27} q^3}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-r + \sqrt{R}\right)$$

i.e. $\boxed{g^3 = \frac{1}{2}\left(-r + \sqrt{R}\right)}$, $R := r^2 + \frac{4}{27}q^3$.

și $h^3 = (t_2) = \frac{1}{2}\left(-r - \sqrt{R}\right) \Rightarrow$

$g^3 - h^3 = \sqrt{R}$.

Există trei rădăcini de ordinul trei pentru alegerea lui $g^3 = \frac{1}{2}\left(-r + \sqrt{R}\right)$ și anume

g, εg și $\varepsilon^2 g$ $\quad (\varepsilon^3 = 1,\ \varepsilon \neq 1)$.

Datorită relației $gh = -\frac{q}{3}$ fiecare alegere a lui g are o pereche pentru h și anume:

$\left(g,\ h = -\frac{q}{3g}\right)$, $\left(\varepsilon g,\ \varepsilon^2 h = -\frac{q}{3\varepsilon g}\right)$ și

în final perechea $\left(\varepsilon^2 g,\ \varepsilon h = -\frac{q}{\varepsilon\varepsilon^2 g}\right)$.

i.e. rădăcinile sunt cele date de (4). ▨

<u>Exemplu 1)</u> Să se rezolve ecuația în $\mathbb{C}$:

$$x^3 - 15x - 126 = 0$$

<u>Soluție</u>: $q = -15$, $r = -126$, $R = r^2 + \frac{4}{27}q^3 = 15376 \Rightarrow \sqrt{R} = 124 \Rightarrow$

$g^3 = \frac{1}{2}(126 + 124) = 125 \Rightarrow \underline{g = 5}$ $(\varepsilon 5, \varepsilon^2 5)$

$\Rightarrow h = -\frac{q}{3g} = \underline{1}$ $(\varepsilon^2, \varepsilon)$. Deci rădăcinile sunt

$\underline{6}$, $5\varepsilon + \varepsilon^2 = \underline{-3 + 2i\sqrt{3}}$, $5\varepsilon^2 + \varepsilon = \underline{-3 - 2i\sqrt{3}}$

▨

Exemplu 2 (probleme cu formula cubică!)

Fie polinomul $f(x) = (x-1)(x-2)(x+3)$
$$= x^3 - 7x + 6$$

ale cărei rădăcini sunt evident 1, 2 și 3.

Aplicând formula cubică o să obținem că o rădăcină este:

$$g+h = \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(-6+\sqrt{-\frac{400}{27}}\right)} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(-6-\sqrt{-\frac{400}{27}}\right)}$$

Nu este deloc banal că numărul din dreapta este real și că este unul din numerele 1, 2 și 3. $\blacksquare$

Temă de reflexie și studiu: Ce facem când formula cubică ne furnizează rădăcinile într-o formă de "nerecunoscut"? Așa cum e exemplul precedent!

Exerciții 1) Să se rezolve ecuația $x^3 - 3x + 1 = 0$ în mulțimea $\mathbb{C}$.

2) Mai este adevărată formula cubică în $\mathbb{Z}_3$?

- Rezolvarea ecuației de gradul patru

(L. Ferrari (1540), R. Descartes (1637)).

Forma generală (împărțim eventual cu termenul dominant) este

$$x^4 + b x^3 + c x^2 + d x + e = 0, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C} \quad (1)$$

Pasul 1 : Facem substituția $\boxed{x := y - \frac{1}{4} b}$

Vom obține o ecuație echivalentă cu (1) de forma:

$$\underline{y^4 + q y^2 + r y + s = 0} \quad (2)$$

Rădăcinile ecuației (1) vor fi $x_i := y_i - \frac{1}{4} b, \ i = \overline{1,4}$

unde y_1, y_2, y_3, y_4 sunt rădăcinile ecuației (2).

- Descompunem polinomul $f(y) = y^4 + q y^2 + r y + s$ ca un produs de polinoame de gradul doi!

Căutăm $j, l, m \in \mathbb{C}$ a.î.

$$(y^4 + q y^2 + r y + s) \overset{?}{=} (y^2 + j y + l)(y^2 - j y + m) \quad (10)$$

Dezvoltând în membrul drept și identificăm coeficienții obținem sistemul:

$$\begin{cases} l + m - j^2 = q \\ j(m - l) = r \\ l m = s \end{cases} \Longrightarrow \text{(manevrăm primele două ecuații)}$$

să exprimăm pe l și m în funcție de j

11

$$(*)\begin{cases} 2m = j^2 + g + \dfrac{r}{j} \\ 2l = j^2 + g - \dfrac{r}{j} \\ lm = s \end{cases} \Longrightarrow$$ (înlocuiesc m și l în ultima ecuație)

și facem calculele:

$$(j^2)^3 + 2g(j^2)^2 + (g^2 - 4s)j^2 - r^2 = 0$$

i.e. j^2 este rădăcina unei ecuații de <u>produl trei</u> (numită <u>rezolventa cubică</u>). De aici îl <u>deducem</u> pe $j \Longrightarrow m = \cdots,\ l = \cdots$ (folosesc primele ecuații din $(*)$).

<u>Pasul 2</u>: Finalizarea soluției.

Cu j, l, m determinați mai sus revenim la descompunerea dată de (10) și obținem două ecuații de produl doi în y care vor furniza $y_{1,2}$ și $y_{3,4}$. ▨

<u>Observație</u>: Rezolvarea ecuației de produl patru are același dezavantaj ca la produl trei: se furnizează soluții care pot fi numere complexe într-o formă de <u>nerecunoscut</u>!

Exercițiu: Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuația:

$$x^4 - 2x^2 + 8x - 3 = 0.$$

- Ce se întâmplă cu ecuațiile polinomiale de grad ≥ 5?

- Abel (1824) a dat o primă demonstrație acceptabilă că rădăcinile polinoamelor de grad ≥ 5 nu se pot exprima "prin radicali". Un exemplu, ecuația

$$2x^5 - 5x^4 + 5 = 0$$

nu are rădăcinile exprimabile prin radicali

- soluția completă a fost dată de Galois

- Discriminantul unei ecuații de gradul trei

Fie $n \geq 2$ număr natural și ecuația:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (*)$$

cu rădăcinile $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$. Numărul complex

$$\boxed{d := \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2}$$

s.n. discriminantul ecuației $(*)$.

Exercițiu. Fie ecuația $x^3 + qx + r = 0$, $p, q \in$

Arătați că:

a) discriminantul ecuației este $d := -(4q^3 + 27r^2)$

b) dacă $d < 0 \Rightarrow$ ecuația are o rădăcină reală și două complexe conjugate.

c) $d = 0 \Rightarrow$ ecuația are toate rădăcinile reale și două din ele sunt egale.

d) $d > 0 \Rightarrow$ ecuația are trei rădăcini reale distincte.

Indicație: Folosiți relațiile lui Viété pentru a calcula d:

$x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = q$,

$x_1x_2x_3 = -r$. $\blacksquare$