

LUCRARE, ALGEBRĂ I, 27 NOIEMBRIE 2020

Puteti folosi, fără demonstrație (dar enunțat!), orice rezultat din curs sau seminar. Timp de lucru 2 ore. 1 punct se acordă din oficiu. Succes!

Exercitiul 1: (a) Aratați că mulțimea $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ este numarabilă. (0.5 puncte)

(b) Fie $f : A \rightarrow B$ o funcție bijectivă. Aratați că există o bijecție $\text{Hom}(A, A) \cong \text{Hom}(B, B)$. (0.5 puncte) ($\text{Hom}(A, A)$ este mulțimea funcțiilor de la A în A)

(c) Există o funcție injectivă $F : \text{Hom}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), \mathbb{Q}(\sqrt{2})) \rightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2})$? (1 punct)

Exercitiul 2: Pe mulțimea \mathbb{R} a numerelor reale definim relația binară: $x \sim y$ dacă și numai dacă $x^2 - x = y^2 - y$.

(a) Arătați că \sim e o relație de echivalență pe \mathbb{R} , calculați clasele de echivalență $\hat{2}$ și $\hat{\frac{1}{2}}$ precum și un sistem de reprezentanți ai relației \sim . (1 punct)

(b) Arătați că există o funcție bijectivă $\mathbb{R}/\sim \cong [-\frac{1}{4}, +\infty)$. (1 punct)

Exercitiul 3: Fie $A := (0, +\infty)$ și definim legea de compoziție

$$\varphi : A \times A \rightarrow A, \quad \varphi(x, y) = x * y := \frac{xy}{x+y}, \quad \forall x, y > 0$$

(a) Arătați că φ este o funcție surjectivă și calculați o secțiune a sa. (1 punct)

(b) Studiați proprietățile acestei legi de compoziție. (1 punct)

(c) Calculați numărul

$$\frac{1}{2020} * \left(\frac{1}{2019} * \dots * \left(\frac{1}{3} * \left(\frac{1}{2} * \frac{1}{1} \right) \right) \dots \right) \quad (1 \text{ punct})$$

Exercitiul 4: Fie $G := \mathbb{R} \setminus \{3\}$ și definim pe G legea de compoziție

$$x * y := xy - 3x - 3y + 12, \quad \forall x, y \in G$$

(a) Aratați că $(G, *)$ este un grup abelian. (1 punct)

(b) Aflați numerele $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $f : (G, *) \rightarrow (\mathbb{R}^*, \cdot)$, $f(x) = ax + b$, pentru orice $x \in G$, să fie un izomorfism de grupuri. (1 punct) ((\mathbb{R}^*, \cdot) este grupul numerelor reale nenule cu înmulțirea uzuală)