Joița Octavian
Ionuț

Temă

<u>Exercițiu</u> Pe mulțimea $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ definim relația

$(a,b)\equiv(a',b') \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\exists)$ o pereche $(\rho,\alpha)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}$

a.î. $\begin{cases} a=\rho^2a'+\alpha^2-b\alpha \\ b=\rho b'+2\alpha \end{cases}$

1) Arătați că $\equiv$ este relație de echivalență pe $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$

Pentru a verifica $(a,b)\equiv(a,b)$ este suficient să luăm $\rho=1$ și $\alpha=0$ observând că

$\begin{cases} a=1\cdot a+0-b\cdot 0 \\ b=1\cdot b+2\cdot 0. \end{cases}$

Vom demonstra acum simetria relației $\equiv$

$(a,b)\equiv(a',b')$ atunci și $(a',b')\equiv(a,b)$

$(a,b)\equiv(a',b') \Leftrightarrow \exists\ \rho,\alpha\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}$ a.î.

$\begin{cases} a=\rho^2a'+\alpha^2-b\alpha \\ b=\rho b'+2\alpha \end{cases}$

$a = q^2 a' + \alpha^2 - b\alpha$, cum $q \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{q^2} a = a' + \frac{\alpha^2}{q^2} - \frac{b\alpha}{q^2}$

$\Leftrightarrow a' = \frac{1}{q^2} a - \frac{\alpha^2}{q^2} + \frac{b\alpha}{q^2}$

cum $b = q b' + 2\alpha$ deducem că

$$a' = \frac{1}{q^2} a - \frac{\alpha^2}{q^2} + \frac{q\alpha b' + 2\alpha^2}{q^2}$$

$$\Leftrightarrow a' = \frac{1}{q^2} a + \frac{\alpha^2}{q^2} + \frac{\alpha}{q} b'.$$

Pe de altă parte

$b = q b' + 2\alpha$

$\Leftrightarrow \frac{b - 2\alpha}{q} = b'$

$\Leftrightarrow b' = \frac{b}{q} - 2\frac{\alpha}{q}$

cum $\frac{1}{q} \in \mathbb{C}^*$ și $\frac{-\alpha}{q} \in \mathbb{C}$, notând

$\frac{1}{q} = k$ și $\frac{-\alpha}{q} = l$ obținem

$$\begin{cases} a' = k^2 a + l^2 - lb \\ b' = kb + 2l \end{cases}$$

deci $(a', b') \equiv (a, b)$

În final demonstrăm tranzitivitatea

Fie $(a,b)\equiv(c,d)$ și $(c,d)\equiv(e,f)$ și dem că $(a,b)\equiv(e,f)$.

$(a,b)\equiv(c,d)$

$\Rightarrow \exists(q_1,\alpha_1)\in \mathbb{C}^*\times\mathbb{C}$ a.î.

$$\begin{cases} a = q_1^2 c + \alpha_1^2 - \cancel{b\alpha} \, b\alpha_1 \\ b = q_1 d + 2\alpha_1 \end{cases}$$

$(c,d)\equiv(e,f)$

$\Rightarrow \exists(q_2,\alpha_2)\in \mathbb{C}^*\times\mathbb{C}$ a.î.

$$\begin{cases} \cancel{a}\, c = q_2^2 e + \alpha_2^2 - d\alpha_2 \\ d = q_2 f + 2\alpha_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = g_1^2 c + \alpha_1^2 - b\alpha_1 = g_1^2 (g_2^2 e + \alpha_2^2 - d\alpha_2) + \alpha_1^2 - b\alpha_1 \\ b = g_1 d + 2\alpha_1 = (g_2 f + 2\alpha_2) \cdot g_1 + 2\alpha_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = g_1^2 g_2^2 e + g_1^2 \alpha_2^2 - g_1^2 d\alpha_2 + \alpha_1^2 - b\alpha_1 \\ b = g_1 g_2 f + 2\alpha_2 g_1 + 2\alpha_1 \end{cases}$$

$b = g_1 d + 2\alpha_1 \Leftrightarrow \frac{b - 2\alpha_1}{g_1} = d$. $(g_1 \neq 0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = g_1^2 g_2^2 e + g_1^2 \alpha_2^2 - g_1^2 \alpha_2 \cdot \frac{b - 2\alpha_1}{g_1} + \alpha_1^2 - b\alpha_1 \\ b = g_1 g_2 f + 2\alpha_2 g_1 + 2\alpha_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = g_1^2 g_2^2 e + g_1^2 \alpha_2^2 - g_1 \alpha_2 (b - 2\alpha_1) + \alpha_1^2 - b\alpha_1 \\ b = g_1 g_2 f + 2(\alpha_2 g_1 + \alpha_1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = g_1^2 g_2^2 e + g_1^2 \alpha_2^2 - g_1 \alpha_2 b + 2 g_1 \alpha_2 \alpha_1 + \alpha_1^2 - b\alpha_1 \\ b = g_1 g_2 f + 2(\alpha_2 g_1 + \alpha_1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = g_1^2 g_2^2 e + (g_1^2 \alpha_2^2 + 2 g_1 \alpha_2 \alpha_1 + \alpha_1^2) - b(\alpha_1 + g_1 \alpha_2) \\ b = g_1 g_2 f + 2(\alpha_2 g_1 + \alpha_1) \end{cases}$$

Notând ~~de~~ $g_1 g_2 = k$ și $(g_1 \alpha_2 + \alpha_1) = l$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = k^2 e + l^2 - bl \\ b = kf + 2l \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a,b) \equiv (e,f).$$

Deci relația noastră este o relație de echivalență.

Obs Relația rămâne relație de echivalență și în cazul $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (dacă $q, \alpha, q_1, q_2, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ atunci și $1, 0, \frac{1}{q}, -\frac{\alpha}{q}, q_1 q_2$ și $(q_1\alpha_2 + \alpha_1) \in \mathbb{R}$) dar și în cazul $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, din aceleași considerente.

2) Arătați că mulțimea factor $\mathbb{C} \times \mathbb{C} /_{\equiv}$ are două elemente $\{\widehat{(0,0)}, \widehat{(0,1)}\}$

Demonstrăm că $(0,0) \not\equiv (0,1)$

$(0,0) \equiv (0,1) \Leftrightarrow \exists (\varrho, \alpha) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ a.î.

$$\begin{cases} 0 = \varrho^2 \cdot 0 + \alpha^2 - 0 \cdot \alpha \Rightarrow 0 = \alpha^2 \Rightarrow \alpha = 0 \\ 0 = \varrho \cdot 1 + 2\alpha \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 = \varrho + 2\alpha \\ \alpha = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \varrho = 0 \text{ fals deoarece } \varrho \in \mathbb{C}^*$$

Demonstrăm că $\{\widehat{(0,0)}, \widehat{(0,1)}\}$ e mulțimea factor

Dacă $a = -\frac{b^2}{4}$

Dem că $(a, b) \equiv (0,0)$.

Luăm $\varrho \in \mathbb{C}^*$ și $\alpha = \frac{b}{2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \varrho^2 \cdot 0 + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{2} \\ b = \varrho \cdot 0 + 2 \cdot \frac{b}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{-b^2}{4} \\ b = b \end{cases}$$

Deci $(a, b) \equiv (0,0)$

Dacă $a \neq -\frac{b^2}{4}$

Dem că $(a, b) \equiv (0,1)$

Luăm α o soluție a ecuației $z^2 - zb - a = 0$

și $g = b - 2\alpha$

$a \neq -\frac{b^2}{4} \Rightarrow a \neq \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{2}$

cum $\alpha^2 - \alpha b - a = 0$

$\Rightarrow \alpha \neq \frac{b}{2} \Rightarrow b - 2\alpha \neq 0 \Rightarrow g \neq 0$

deci $g \in \mathbb{C}^*$

$$\begin{cases} a = g^2 \cdot 0 + \alpha^2 - b\alpha \\ b = g + 2\alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \alpha^2 - b\alpha \\ b = b - 2\alpha + 2\alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \alpha^2 - b\alpha - a \\ b = b \end{cases}$$

adevărat $\Rightarrow (a, b) \equiv (0, 1)$

$\Rightarrow \{\widehat{(0,0)}, \widehat{(0,1)}\}$ este mulțimea factor

3. Rezolvați problema similară pe mulțimea $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ și $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

Demonstrăm că, pentru $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, mulțimea factor $\mathbb{R} \times \mathbb{R}/_{\equiv}$ este $\{\widehat{(-1,0)}, \widehat{(0,0)}, \widehat{(0,1)}\}$.

Mai întâi demonstrăm că $(-1,0) \not\equiv (0,0)$, $(-1,0) \not\equiv (0,1)$

Demonstrația că $(0,0) \not\equiv (0,1)$ este analog ca la 2).

Dacă $(-1,0) \equiv (0,0) \Rightarrow \exists (g, \alpha) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ a.î.

$$\begin{cases} -1 = g^2 \cdot 0 \cancel{a^1} + \alpha^2 - 0\alpha \\ 0 = g \cdot 0 + 2\alpha \Rightarrow \alpha = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow -1 = 0$ fals. $\Rightarrow (-1,0) \not\equiv (0,0)$

Dacă $(-1,0) \equiv (0,1) \Rightarrow \exists (g, \alpha) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ a.î.

$$\begin{cases} -1 = g^2 \cdot 0 + \alpha^2 - 0 \cdot \alpha \\ 0 = g + 2\alpha \end{cases}$$

$\Rightarrow -1 = \alpha^2$, dar $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha^2 \geq 0$

fals $\Rightarrow (-1,0) \not\equiv (0,1)$.

Dacă $a = -\frac{b^2}{4}$, atunci $(a,b) \equiv (0,0)$, demonstrația fiind analog ca la 2)

Dacă $a > -\frac{b^2}{4}$ atunci $(a,b) \equiv (0,1)$. Într-adevăr

~~Alegem α~~

$a > -\frac{b^2}{4} \Rightarrow$ ecuația $z^2 - zb - a = 0$ are soluții reale

$(\Delta = b^2 + 4a > 0)$

Deci, alegând α ~~o~~ soluție a ecuației $z^2 - zb - a = 0$

și $q = b - 2\alpha$ (ca mai sus $a \neq -\frac{b^2}{4} \Rightarrow q \neq 0 \Rightarrow q \in \mathbb{R}^*$)

$$\begin{cases} a = q \cdot 0 + \alpha^2 - b\alpha \\ b = q \cdot 1 + 2\alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \alpha^2 - b\alpha \\ b = b - 2\alpha + 2\alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \alpha^2 - b\alpha - a \\ b = b \end{cases}$$

adevărat $\Rightarrow (a,b) \equiv (0,1)$

Dacă ~~a, b~~ $a < -\frac{b^2}{4}$ atunci $(a,b) \equiv (1,0)$ Într-adevăr

$a < -\frac{b^2}{4} \Rightarrow$ ecuația $\cancel{q^2}\, z^2 + \left(\frac{b^2}{4} + a\right) = 0$ are soluții reale

$(\Delta = -\frac{b^2}{4} - a > 0)$

Alegem $\cancel{\alpha}\, q$ o soluție a ecuației $\cancel{q^2}\, z^2 + \frac{b^2}{4} + a = 0$

$a < -\frac{b^2}{4} \Rightarrow 0 < -\frac{b^2}{4} - a$

cum $q^2 = -\frac{b^2}{4} - a \Rightarrow q^2 > 0 \Rightarrow q > 0 \Rightarrow q \in \mathbb{R}^*$.

şi luăm $\alpha = \frac{b}{2}$

$$\begin{cases} a = q^2 \cdot -1 + \alpha^2 - b\alpha \\ b = q \cdot 0 + 2\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -q^2 + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{2} \\ b = 2\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = -q^2 - \frac{b^2}{4} - a \\ b = b \end{cases}$$

adevărat $\Rightarrow (a, b) \equiv (-1, 0)$

Deci $\{\widehat{(-1,0)}, \widehat{(0,0)}, \widehat{(0,1)}\}$ este mulţimea factor $\mathbb{R}\times\mathbb{R}/_{\equiv}$.

În cazul $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ vom rezolva în 2 etape:

Vom dem mai întâi că $\forall a, b \in \mathbb{Q}\ \exists\ x \in \mathbb{Q}$ aî

$(x, 0) \equiv (a, b)$

Vom lua $x = a + \frac{b^2}{4}$

$(a, b) \equiv (x, 0) \Leftrightarrow \exists\ (q, \alpha) \in \mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}$ aî

$$\begin{cases} a = q^2 x + \alpha^2 - b\alpha \\ b = 2\alpha \end{cases}$$

Fie $\alpha = \frac{b}{2}$ şi $q = 1$

$\Rightarrow a = a + \frac{b^2}{4} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - b \cdot \frac{b}{2}$

$= a + \frac{b^2}{4} + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{2} = a$

și $b = \frac{b}{2} \cdot 2$ ceea ce doream să demonstrăm

Deci, cum $q \in \mathbb{Q}^+$ și $\alpha \in \mathbb{Q}$ a.î.

$$\begin{cases} a = q^2\left(a + \frac{b^2}{4}\right) + \alpha^2 - b\alpha \\ b = 2\alpha \end{cases}$$

$\Rightarrow (a, b) \equiv \left(a + \frac{b^2}{4}, 0\right)$

Deci putem lucra doar cu mulțimea

$A = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{Q}\}$, orice alt elem din $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ fiind echivalent cu cel puțin un elem din A

$(0,0) \equiv (x, 0) \Leftrightarrow x = \alpha^2$ și $0 = 2\alpha \Leftrightarrow x = 0$

deci $(0,0)$ e echivalent doar cu $(0,0)$ din A

$(x, 0) \equiv (y, 0)$, $x, y \in \mathbb{Q}^+ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists (\alpha, q) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^+$ a.î.

$$\begin{cases} x = q^2 y + \alpha^2 \\ 0 = 2\alpha \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \alpha = 0$

$\Leftrightarrow \frac{x}{y} = q^2$. Putem rescrie ca $xy = q^2 y^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists k$ a.î. $xy = k^2$.

Observație $\forall$ nr rațional pozitiv se scrie în mod unic ca un produs de nr prime distincte la puteri întregi (nu neapărat pozitive)

Deci $a \in \mathbb{Q}^*$, $a > 0 \Rightarrow a = a_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot a_n^{k_n}$, $a_1, \ldots a_n$ sunt nr prime distincte și $k_1, \ldots k_n \in \mathbb{Z}^*$

a e de forma q^2, $q \in \mathbb{Q}^* \Leftrightarrow 2 | k_1, \ldots 2 | k_n$.

Considerăm B mult nr întregi liberi de pătrate și vom dem că $M = \{ \widehat{(x, 0)} \mid x \in B \} \cup \{ \widehat{(0, 0)} \}$ e mult factor

Primul pas este de a dem că $\forall$ $m, n \in B$ cu $m \neq n$ atunci $(m, 0) \not\equiv (n, 0)$

Pp prin abs că ~~$(m, 0) \not\equiv$~~ $(m, 0) \equiv (n, 0)$

$\Rightarrow$ mn este pătrat perfect $\Rightarrow$ m și n au același semn

Pp că sunt ambele pozitive. Cazul în care sunt amândouă negative se tratează complet analog.

Fie $m = a_1^{r_1} \cdot a_2^{r_2} \cdot \ldots \cdot a_l^{r_l}$

$n = a_1^{s_1} \cdot a_2^{s_2} \cdot \ldots \cdot a_l^{s_l}$

unde $a_1, a_2, \ldots a_l$ sunt nr prime distincte și

$r_j \in \{0, 1\}$ și $s_j \in \{0, 1\}$, $j = \overline{1, l}$

$\Rightarrow m \cdot n = a_1^{r_1+s_1} \cdot a_2^{r_2+s_2} \cdot \ldots \cdot a_\ell^{r_\ell+s_\ell}$

$m \cdot n$ pătrat perfect $\Rightarrow 2 \mid r_j + s_j \quad j = \overline{1,\ell}$. Cum r_j și $s_j \in \{0,1\}$

$\Rightarrow r_j = s_j \quad \forall j \in \{1,2,\ldots,\ell\}$

$\Rightarrow m = n$

Deci $\forall m, n \in B$ cu $m \neq n$ atunci

$(m,0) \not\equiv (n,0)$

Dem acum că $\forall X \in \mathbb{Q}^*$, $(X,0)$ este echivalent cu un elem din M. P.p. că $X > 0$, cazul $X < 0$ se tratează analog.

Fie $X = a_1^{c_1} \cdot a_2^{c_2} \cdot \ldots \cdot a_d^{c_d}$, $a_1, a_2, \ldots a_d$ nr prime distincte

și $c_1, c_2, \ldots c_d \in \cancel{\mathbb{Q}} \mathbb{Z}^*$

Fie $C = \{ i \mid 1 \le i \le d,\ c_i \text{ impar},\ i \in \mathbb{N}^* \}$

Luăm $Y = \prod_{j \in C} a_j \Rightarrow Y \in B$.

$\Rightarrow XY = \prod_{j \notin C} a_j^{c_j} \cdot \prod_{j \in C} a_j^{c_j+1}$

~~Prin~~ Din definiția lui C $\Rightarrow$ toate puterile ~~lui XY~~ sunt pare $\Rightarrow XY = q^2$

$\Rightarrow (X,0) \equiv (Y,0)$ ceea ce doream să demonstrăm

$\Rightarrow$ mulțimea factor este chiar $M \cup \{(0,0)\}$