PROBLEME – GRUPURI DE PERMUTĂRI

55) Să se arate că:

a) $Z(S_n) = \{e\}$, $(\forall)\ n \geq 3$; b) $Z(A_n) = \{e\}$, $(\forall)\ n \geq 4$.

56) Să se arate că:

$$S_n = \langle \{(12), (13), \ldots, (1n)\} \rangle =$$
$$= \langle \{(12), (23), \ldots, (n-1, n)\} \rangle = \langle \{(12), (123\ldots n)\} \rangle$$

57) Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 3$. Să se arate că:

a) A_n e generat de cicli de lungime 3.

b) $A_n = \langle \{(123), (124), \ldots (12n)\} \rangle$

c) Fie $n \geq 5$, $H \trianglelefteq A_n$ cu $A_n/_H$ abelian $\Rightarrow$ $H = A_n$.

d) Fie $n \geq 5$, $H \trianglelefteq A_n$, H conține un ciclu de lungime 3. Atunci $H = A_n$.

REFERAT (Teoremă): Dacă $n \geq 5 \Rightarrow A_n$ este grup simplu (i.e. nu are subgrupuri normale netriviale

58) Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 6 & 5 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_7$.

Să se descompună σ în produs de cicli disjuncți, în produs de transpoziții, calculați $\varepsilon(\sigma)$ și σ^{-1}, σ^{2020}.

~~57~~ 59) Să se arate că:

$$(i_1 i_2 \ldots i_{2k})^2 = (i_1 i_3 \ldots i_{2k-1})(i_2 i_4 \ldots i_{2k})$$

$$(i_1 i_2 \ldots i_{2k+1})^2 = (i_1 i_3 i_5 \ldots i_{2k+1} i_2 i_4 \ldots i_{2k})$$

60) Fie $n \geq 6$. Arătați că ~~(∃)~~ $\sigma \in S_n$ a.î.

$$\sigma^2 = (12)(3456).$$

61) Fie $\underline{n \geq 5}$. Folosind faptul că A_n e grup simplu arătați că A_n este singurul <u>subgrup normal</u> netrivial al lui S_n.

62) Fie $n \geq 5$. Calculați toate morfismele de grup $S_n \longrightarrow (\mathbb{Z}, +)$, $S_n \longrightarrow (\mathbb{Q}^*, \cdot)$

63) Să se calculeze toate morfismele de grup:

$$S_n \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \; ; \; S_3 \longrightarrow \mathbb{Z}_3 \; ; \; \mathbb{Z}_3 \longrightarrow S_3$$

<u>Temă (referat!)</u> Descrieți toate morfismele de grupuri

$$f : S_4 \longrightarrow S_3 .$$

6~~4~~) (<u>grupul cuaternionilor</u>) Fie $Q := \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ cu înmulțirea definită prin:

$ij = k$, $ji = -k$, $jk = i$, $kj = -i$

$ki = j$, $ik = -j$, $i^2 = j^2 = k^2 = -1$

Arătați că Q este un grup cu 8 elemente și arătați că orice subgrup în Q este normal. (14

Altă prezentare a lui Q: Fie

$$G = (U(M_2(\mathbb{C})), \cdot)$$ grupul matricilor inversabile de ordin 2 și

$$j := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad k := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in G.$$

$$\Longrightarrow \quad o(j) = o(k) = 4, \quad j^2 = k^2, \quad jk = kj^3$$

în grupul G.

$$\boxed{Q = \langle j, k \rangle} = \{1, j, j^2, j^3, k, kj, kj^2, kj^3$$

(Detaliile vă rămân ca Temă!).