Probleme inele

1) a) Pe grupul $(\mathbb{Z}, +)$ se pot defini două structuri de inel.

b) Pe grupul $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, +)$ nu se poate da o structură de inel.

c) Fie $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$. Pe grupul $(\mathbb{Z}_n, \oplus)$ se pot da $\varphi(n)$ structuri de inel, toate izomorfe cu inelul claselor de resturi modulo n $(\mathbb{Z}_n, \oplus, \odot)$.

2) Dacă R e inel necomutativ $\Rightarrow |R| \geq 8$.
Daţi exemplu de inel necomutativ cu 8 elemente.

3) Fie X o mulţime nevidă. Atunci că $(\mathcal{P}(X), \Delta, \cap)$ formează un inel comutativ unde:

$$\begin{cases} A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B) \\ A \cdot B := A \cap B, \end{cases} \quad (\forall)\, A, B \in \mathcal{P}(X)$$

$0_{\mathcal{P}(X)} := \phi$, $1_{\mathcal{P}(X)} := X$.

Fie $\mathbb{Z}_2^X :=$ inelul de funcţii pe X. Arătaţi că

$\chi : \mathcal{P}(X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_2^X$, $\chi(A) := \chi_A$,

unde $\chi_A : X \to \mathbb{Z}_2$, $\chi_A(x) := \begin{cases} \hat{1}, & x \in A \\ \hat{0}, & x \notin A \end{cases}$

$(\forall)\, A \in \mathcal{P}(X)$, $x \in X$ este un izomorfism de inele.

4) Fie X, Y mulțimi disjuncte nevide. Atunci $(\exists)$ un izomorfism de inele $\mathcal{P}(X \cup Y) \simeq \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}($

5) Fie R = inel, S = mulțime și $f : R \longrightarrow S$ o funcție bijectivă. Atunci $(\exists!)$ o structură de inel pe S a.î. f este izomorfism de inele.

$\Longrightarrow$ Consecință (+ipoteza continuului) Pe orice mulțime nevidă se poate defini o structură de inel.

6) Pe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definim operațiile:

$$(a, b) + (a', b') := (a + b, a' + b')$$
$$(a, b) * (a', b') := (aa' - bb', ab' + ba')$$

Arătați că $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \cdot)$ e un inel izomorf cu $\mathbb{Z}[i]$.

7) a) Arătați că $U(\mathbb{Z}[i]) = \{1, -1, i, -i\}$

b) Fie $A := \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0,\ n = \text{impar} \right\}$

Arătați că A e subinel în $(\mathbb{Q}, +, +)$ și calculați $U(A)$.

8) Fie R un inel a.î. ~~dc~~ $a \in R$ $(\exists!)$ $a' \in R$ a.î. $aa' = 1$. Atunci $a'a = 1$.

9) Fie $R := (\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}, +)$ cu înmulțirea $(a, x) \cdot (b, y) := (ab,\ ay + bx)$, $(\forall)\ a, b \in \mathbb{Z},\ x, y \in \mathbb{Q}$

Arătați că R e inel, calculați $U(R)$ și divizorii lui zero ai R.

10) Fie A = inel comutativ, finit și $a \in A \setminus \{0\}$.
Atunci ~~a~~ este inversabil sau a este divizor al lui zero.

11*) Fie A = inel comutativ, finit, $|A| = n$ și fie
$N := \{ r \in A \mid r \neq 0,\ r \text{ neinversabil} \}$.
Arătați că dacă $N \neq \phi \Rightarrow |N| \geq [\sqrt{n}] - 1$

Cons: 1) A inel comutativ, $|A| = 64 \Rightarrow A$ este corp sau A are cel puțin 7 elemente neinversabile

2) Există un inel comutativ, $|A| = 100$ și A are exact 8 elemente neinversabile?

12) $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $U(\mathbb{Z}_n) = \{ \hat{x} \in \mathbb{Z}_n \mid (x, n) = 1 \}$

13*) Fie A = inel comutativ, infinit, care nu e corp.
Atunci $A \setminus U(A)$ este infinită.

14) Dați exemplu de un inel R (necomutativ), $x \in R$ a.î. mulțimea $I := \{ r x s \mid r, s \in R \}$ nu e ideal al lui R.

15) Fie $\mathbb{F}_4 := \left\{ \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{b} & \hat{a}+\hat{b} \end{pmatrix} \middle| \hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{Z}_2 \right\} \subseteq M_2(\mathbb{Z}_2)$

Arătați că $\mathbb{F}_4$ este un subinel în $M_2(\mathbb{Z}_2)$ și $\mathbb{F}_4$ este un corp comutativ cu 4 elemente.

16) Fie $\phi \neq X \subseteq \mathbb{R}$ şi $A := \mathbb{R}^X$ inelul de funcţii pe mulţimea X. Arătaţi că:

a) $|X| \geq 2 \Longrightarrow \mathbb{R}^X$ nu e domeniu de integritate

b) Dacă $X =$ infinită $\Longrightarrow \mathbb{R}^X$ are are o infinitate de elemente idempotente (i.e. $e = e^2$)

c) Dacă $f \in U(\mathbb{R}^X) \Longrightarrow f(a) \neq 0, (\forall) a \in X$

d) Calculaţi $U(\mathbb{R}^X)$.

17) Fie $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$ şi $\xi_n := \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ şi

$$\mathbb{Z}[\xi_n] := \{ a_0 + a_1 \xi_n + a_2 \xi_n^2 + \dots + a_{n-1} \xi_n^{n-1} \mid a_0, a_1, \dots a_{n-1} \in \mathbb{Z} \} \subseteq \mathbb{C}.$$

Arătaţi că $\mathbb{Z}[\xi_n]$ este un subinel în $\mathbb{C}$

($n = 4 \Rightarrow \mathbb{Z}[\xi_4] = \mathbb{Z}[i]$; $n = 3$ $\mathbb{Z}[\xi_3]$ s.n. întregilor lui Eisenstein)

18) Fie $A =$ inel comutativ şi $N(A) := \{ x \in A \mid x$ nilpotent$\} = \{ x \in A \mid (\exists) n \in \mathbb{N}$ a.i. $x^n = 0 \}$. Arătaţi că:

a) $N(A)$ e ideal în A

b) Dacă $x \in N(A)$ şi $a \in U(A) \Longrightarrow a + x \in U(A)$

c) $N(A_1 \times \dots \times A_n) = N(A_1) \times \dots \times N(A_n)$, $(\forall)$ $A_1, \dots, A_n$ inele

d) $N\left(A/_{N(A)}\right) = \{\hat{0}\}$.

19) Fie $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, p_i = nr. prime distincte.

Arătați că:

a) $N(\mathbb{Z}_n) = \{\hat{x} \in \mathbb{Z}_n \mid p_1 p_2 \cdots p_k \mid x\}$

b) $|N(\mathbb{Z}_n)| = p_1^{\alpha_1 - 1} p_2^{\alpha_2 - 1} \cdots p_k^{\alpha_k - 1}$

c) $N(\mathbb{Z}_{24}) = \{\hat{0}, \hat{6}, \widehat{12}, \widehat{18}\} = \hat{6}\,\mathbb{Z}_{24}$

d) $|N(\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{24})| = ?$, $|N(\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_{100})| = ?$

20) ~~Dați~~ exemple de două inele neizomorfe cu exact 36 de elemente nilpotente.

21) Fie $f : R \to S$ un morfism de inele. Atunci

a) f este monomorfism $\Longleftrightarrow$ f este injectiv.

b) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, $f(x) := x$, $(\forall) x \in \mathbb{Z}$ este epimorfism de inele și nu e injectiv.

22) Fie A = inel comutativ și $\mathrm{Idem}(A) := \{e \in A \mid e^2 = e\}$.

Atunci:

a) $e, f \in \mathrm{Idem}(A) \Rightarrow e \oplus f \overset{def}{:=} e + f - 2ef$ este tot idempotent.

b) Arătați că $(\mathrm{Idem}(A), \oplus, \cdot)$ este inel, unde „·" e înmulțirea de pe inelul A.

c) Dacă $|\mathrm{Idem}(A)| < \infty \Rightarrow (\exists)\, t \in \mathbb{N}$ a.î.

$|\mathrm{Idem}(A)| = 2^t$

23) Fie p = număr prim. Atunci

$$|\mathrm{Idem}(M_2(\mathbb{Z}_p))| = p(p+1)+2 \neq 2^t$$

24) a) Fie $R_1, \dots, R_n$ inele. Atunci:

$$\mathrm{Idem}(R_1 \times \dots \times R_n) = \mathrm{Idem}(R_1) \times \dots \times \mathrm{Idem}(R_n)$$

b) Fie A = <u>domeniu de integritate</u> și $m, n \in \mathbb{N}^*$ a.î. $A^m \simeq A^n$ (izo de <u>inele</u>) $\Longrightarrow$ <u>$m = n$</u>

25) a) Arătați că $\mathrm{Idem}(\mathbb{Z}_{12}) = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{4}, \hat{9}\}$

b) Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$, $p_1, \dots p_k$ = prime distincte

$$\Longrightarrow |\mathrm{Idem}(\mathbb{Z}_n)| = 2^k.$$

c) $|\mathrm{Idem}(\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_{100})| = 32.$

26) Fie $R := \begin{pmatrix} \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix} \overset{def}{:=} \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \middle| x, y, z \in \mathbb{Q} \right\}.$ Fie R subinel în $M_2(\mathbb{Q})$,

Arătați că R e <u>subinel</u> în $M_2(\mathbb{Q})$,

Arătați că $I := \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix}$, $J := \begin{pmatrix} \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sunt idealele <u>bilaterale</u> în R și $IJ = 0$. Cît este $I + J$?

27)* (<u>Kaplanski</u>) Fie R un inel, $a \in R$ ce are <u>doi</u> inverși (diferiți) la <u>stânga</u>. Atunci a are o <u>infinitate</u> de inverși la stânga.

<u>Facultativ</u> : Construiți un astfel de inel!

28) Fie $R_1, \dots, R_n$ inele și $R := R_1 \times \dots \times R_n$ produsul lor direct. Arătați că:

1) $I \leq_s R \iff (\exists)\ I_k \leq_s R_k,\ (\forall)\ k = \overline{1,n}$ a.î. $I = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$. (Analog, pt. ideale drepte/bilaterale)

2) Dacă $I_k \trianglelefteq R_k,\ (\forall)\ k = \overline{1,n} \Rightarrow$ există un izomorfism de inele:

$$R_1 \times \dots \times R_n / _{I_1 \times \dots \times I_n} \simeq R_1/_{I_1} \times \dots \times R_n/_{I_n}$$

29) Fie $A := \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \dots \times \mathbb{Q} \times \dots$ (inelul de funcții pe $\mathbb{Q}$) și

$$I := \{ x = (x_n)_{n \geq 1} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \mid supp(x) < \infty \}.$$

Atunci I e <u>ideal</u> în A și $I \neq I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n \times \dots$

$(\forall)\ I_n$ ideal în $\mathbb{Q}$.

30) Listați toate idealele din inelele:

$\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_6$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Q}$

31)* (facultativ) Fie R = inel, $I \trianglelefteq R$ un ideal bilateral și

$$M_n(I) := \{ (a_{ij}) \in M_n(R) \mid a_{ij} \in I,\ (\forall)\ i,j = \overline{1,n} \}$$

a) Arătați că $M_n(I) \trianglelefteq M_n(R)$ este ideal bilateral în inelul de matrici $M_n(R)$ și

$$M_n(R) / _{M_n(I)} \simeq M_n(R/_I),$$ izo de inele

b)* $\mathcal{J} \trianglelefteq M_n(R)$ este un ideal bilateral în $M_n(R) \Longleftrightarrow (\exists!)\ I \trianglelefteq R$ ideal bilateral în R a.î. $\mathcal{J} = M_n(I)$.

32)* (Temă REFERAT) Fie R un inel a.î. $x^3 = x$, $(\forall)\ x \in R$. Atunci R e inel comutativ.

33)* (Temă REFERAT) Clasificați, până la un izomorfism, toate inelele cu cel mult patru elemente.

34)* Fie $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, p_i = prime distincte. Arătați că funcția

$$\varphi : \mathrm{Idem}(\mathbb{Z}_n) \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}(\{p_1, p_2, \ldots p_k\})$$

$\varphi(\hat{e}) :=$ mulțimea numerelor prime ce apar în descompunerea lui (n, e), $(\forall)\ \hat{e} = \hat{e}^2 \in \mathbb{Z}_n$ este bijectivă. Arătați că

$$\mathrm{Idem}(\mathbb{Z}_{360}) = \{\hat{0}, \hat{1}, \widehat{81}, \widehat{136}, \widehat{145}, \widehat{216}, \widehat{225}, \widehat{280}\}.$$

35)* (Temă Referat) Fie $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$. Atunci:

a) p = prim, $p \geq 3 \Longrightarrow (U(\mathbb{Z}_{p^n}), \cdot)$ e grup ciclic

b) $U(\mathbb{Z}_2)$ și $U(\mathbb{Z}_4)$ sunt ciclice; iar $n \geq 3 \Longrightarrow$

$$(U(\mathbb{Z}_{2^n}), \cdot) \simeq (\mathbb{Z}_2, +) \times (\mathbb{Z}_{2^{n-2}}, +)$$

(izo de grupuri)

36) Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$ a.î. inelul factor $\mathbb{Z}_n$ are exact <u>cinci ideale</u>. Arătați că, $(\exists)$ p = nr. prim a.î. $n = p^4$.

37) Fie A = inel <u>comutativ</u>. Atunci A are elemente idempotente netriviale (i.e. $\neq 0, 1$) $\Longleftrightarrow$ $(\exists)$ B, C inele comutative a.î. $A \simeq B \times C$ (izo. de inele). (Indicație: Lema chineză)

38*) (Temă de referat) Fie $f : A \longrightarrow B$ morfism <u>surjectiv</u> de inele comutative a.î. <u>$\mathrm{Ker}(f) \subseteq N(A)$</u> $:= \{x \in A \mid x = \text{nilpotent}\}$. Atunci funcția $\varphi : \mathrm{Idem}(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Idem}(B)$, $\varphi(a) := f(a)$, $(\forall)$ $a = a^2 \in A$ e <u>bijectivă</u>. Arătați că inelul factor $\mathbb{Z}_{180}[X] / (X^2 - \hat{7}X + \hat{30})$ are 64 de elemente idempotente.

39) Arătați că idealul lui $\mathbb{Z}[X]$ generat de 2 și X <u>nu</u> este principal (i.e. generat de un element)

40) Descrieți elementele din inelul factor $\mathbb{Z}[X] / (X^2 - 1)$ și calculați $\mathrm{Idem}\left(\mathbb{Z}[X] / (X^2-1)\right)$

41) Arătați că $\mathbb{Q}[X]/(X^2-1) \simeq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ (izo de inele)

și $\mathbb{Z}[X]/(X^2-1) \not\simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

42) Folosind teorema fundamentală de izomorfism pentru inele să se arate următoarele izomorfisme:

$\mathbb{Z}[i]/(1+i) \simeq \mathbb{Z}_2$; $\mathbb{Z}[i]/(2+i) \simeq \mathbb{Z}_5$;

$\mathbb{Z}[i]/(5) \simeq \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$; $\mathbb{Z}[X]/(X^2-X) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

43) Fie $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, distincte două câte două.

Atunci $\mathbb{R}[X]/\big((X-a_1)(X-a_2)\dots(X-a_n)\big) \simeq \mathbb{R}^n$.

44)* (proprietatea de universalitate a corpului de fracții)

Fie R = domeniu de integritate și $i : R \hookrightarrow Q(R)$ morfismul canonic. **Atunci**:

$i(r) := \frac{r}{1}$, $(\forall) r \in R$

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "(\forall)\varphi"'] \arrow[dr, phantom, "="] & Q(R) \arrow[dl, dashed, "(\exists!)\overline{\varphi}"] \\ K & \end{tikzcd}$$

$(\forall)$ K = corp comutativ

$(\forall)$ $\varphi : R \longrightarrow K$ morfism injectiv de inele

$(\exists!)$ $\overline{\varphi} : Q(R) \longrightarrow K$ morfism de corpuri a.î.

$\overline{\varphi} \circ i = \varphi$.

$\Rightarrow$ Perechea $(Q(R), i)$ este "obiectul inițial în categoria" perechilor (K, φ), K = corp comutativ și $\varphi : R \hookrightarrow K$ morfism injectiv de inele.

45) Fie K = <u>corp comutativ</u>, $R \subseteq K$ <u>subinel</u> 20

şi $\overline{R} := \{ a b^{-1} \mid a, b \in R, b \neq 0 \}$.

Arătaţi că $\overline{R}$ este cel mai mic subcorp a lui K care conţine R şi $Q(R) \simeq \overline{R}$ (izo de corpuri).

<u>Consecinţă</u> K = corp $\Longrightarrow Q(K) \simeq K$ (izo de corpuri)

46) Arătaţi că există un izomorfism de corpuri
$Q(\mathbb{Z}[i]) \cong \mathbb{Q}(i) := \{ a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q} \} \subseteq \mathbb{C}$

47)* Fie $p \in \mathbb{Z}$ <u>număr prim</u> şi
$\mathbb{Z}_{(p)} := \{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid p \nmid b,\ a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0 \}$

Arătaţi că $Q(\mathbb{Z}_{(p)}) \simeq \mathbb{Q}$. (izo de corpuri)

Cînd $\mathbb{Z}_{(p)} \simeq \mathbb{Z}_{(q)}$ (izo de inele)? (p, q = prime)