

REEXAMINARE SI MARIRI, ALGEBRĂ I, 1 SEPTEMBRIE 2021

Puteti folosi, fără demonstrație (dar enunțat!), orice rezultat din curs sau seminar. Timp de lucru 2 ore. **SUCCES!**

Exercitiul 1: (a) Dați un exemplu de funcție $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ injectiva si care nu e surjectiva. **(0,5 puncte)**

(b) Dați un exemplu de relatie de echivalența \sim pe multimea \mathbb{C} astfel incit mulțimea factor \mathbb{C}/\sim sa aiba exact 4 elemente. **(1 punct)**

(c) Dați un exemplu de relatie de echivalența \sim pe multimea \mathbb{R} astfel incit mulțimea \mathbb{Z} sa fie un sistem de reprezentanți pentru relația \sim . **(1 punct)**

Exercitiul 2: Fie permutarea $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 6 & 9 & 7 & 10 & 1 & 4 & 8 & 2 & 5 \end{pmatrix} \in S_{10}$.

(a) Descompuneți permutarea τ în produs de cicli disjunți, în produs de transpoziții și determinați signatura permutării τ . **(1,5 puncte)**

(b) Determinați ordinul permutării τ si calculați τ^{2021} . **(1 punct)**

Exercitiul 3: Fie $G := \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ produsul direct al grupului uzual $(\mathbb{Q}, +)$ al numerelor raționale cu el insusi si definim $f, g : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ prin formulele:

$$f(x, y) := (-y, x), \quad g(x, y) := (y, -x - y)$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{Q}$.

a) Arătați că f si g sunt automorfisme ale grupului G . **(1,5 puncte)**

b) Determinați ordinele elementelor f, g si $f \circ g$ in grupul $\text{Aut}(G)$. **(1 punct)**

Exercitiul 4: Fie $A := (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, *)$ unde $+$ e adunarea obisnuita (pe componente) si

$$(x, y) * (z, t) := (xz - 5yt, xt + yz)$$

pentru orice $x, y, z, t \in \mathbb{R}$

(a) Aratați ca $A = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, *)$ este un corp comutativ. **(1, 5 puncte)**

(b) Aratați ca $f : A \rightarrow \mathbb{C}$, $f(x, y) := x + y\sqrt{5}i$, pentru orice $(x, y) \in A$ este un izomorfism de corpuri, unde \mathbb{C} e corpul uzual al numerelor complexe. **(1 punct)**

Prof. dr. G. Militaru