

RESTANȚĂ, ALGEBRĂ I, 4 IUNIE 2021

Puteti folosi, fără demonstrație (dar enunțat!), orice rezultat din curs sau seminar. Timp de lucru 2 ore. SUCCES!

**Exercitiul 1:** Pe mulțimea  $A := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  definim următoarea relație:  $(a, b) \approx (c, d)$  dacă și numai dacă există  $u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  astfel încât  $ab = u^2 cd$ .

- (a) Arătați că  $\approx$  este o relație de echivalență pe  $A$ . **(1 punct)**
- (b) Determinați clasele de echivalență ale elementelor  $(0, 0)$ ,  $(2021, 0)$  și  $(1, 2021)$ . **(0,5 puncte)**
- (c) Determinați un sistem de reprezentări ai relației  $\approx$ . **(1 punct)**

**Exercitiul 2:** Fie permutarea  $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 6 & 5 & 2 & 9 & 7 & 8 & 1 & 3 & 11 & 12 & 10 \end{pmatrix} \in S_{12}$ .

- (a) Descompuneți permutarea  $\tau$  în produs de cicluri disjuncti, în produs de transpoziții și determinați signatura permutării  $\tau$ . **(1 punct)**
- (b) Determinați ordinul permutării  $\tau$  și calculați  $\tau^{20}$ . **(1 punct)**
- (c) Găsiți soluțiile ecuației  $\sigma^2 = \tau$  în  $S_{12}$ . **(0,5 puncte)**

**Exercitiul 3:** a) Fie  $(G, \cdot)$  un grup. Arătați că mulțimea  $\text{Aut}(G)$  a automorfismelor lui  $G$  este un grup cu operația de compunere a funcțiilor. **(1 punct)**

b) Determinați grupurile  $\text{Aut}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$  și  $\text{Aut}(\mathbb{Z}_4)$ . **(1,5 puncte)**

**Exercitiul 4:** (a) Determinați toate idealele și descrieți toate inelele factor ale inelului  $\mathbb{Z}_{12}$  al claselor de resturi modulo 12. **(1 punct)**

(b) Determinați elementele inversabile și toate elementele nilpotente din produsul direct de inele  $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ . **(1 punct)**

(c) Dați un exemplu de inel necomutativ cu 27 elemente. **(0.5 puncte)**

**Prof. dr. G. Militaru**  
**Dr. R. Dinu**