Probleme (legi de compoziție, grupuri)

1) Fie A o mulțime cu n elemente. Câte legi de compoziție se pot defini pe A? Câte sunt comutative? Câte au element neutru?

2) Studiați proprietățile (asociativitate, comutativitate, element neutru, inversabile) pentru următoarele legi de compoziție

a) pe $\mathbb{N}$: $\begin{cases} x * y := x + 1 \\ x * y := x \\ x * y := xy + 1 \end{cases}$, $(\forall)\ x, y \in \mathbb{N}$

b) pe $\mathbb{R}$: $x * y := x + [y]$, $(\forall)\ x, y \in \mathbb{R}$

c) pe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$: $(x_1, y_1) * (x_2, y_2) := (x_1 x_2,\ x_2 y_1 + y_2)$

3) Fie M un monoid și $x \in M$ fixat. Arătați că $(\exists!)$ un morfism de monoizi $f_x : (\mathbb{N}, +) \longrightarrow M$ a.î. $f_x(1) = x$. Mai mult, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$ avem că $f_x(n) = x^n$.

4) Fie $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ și legea de compoziție pe $\mathbb{Z}$

$$x * y := axy + b(x+y) + c, \quad (\forall)\ x, y \in \mathbb{Z}$$

Arătați că $M_{a,b,c} := (\mathbb{Z}, *)$ este monoid $\Longleftrightarrow$

$$b = b^2 - ac \text{ și } b \mid c.$$

În acest caz, arătați că $(\exists)$ un izomorfism de monoizi

$$M_{a,b,c} \simeq M_{a,1,0}.$$

5) Fie A o mulțime nevidă și $\mathcal{P}(A)$ mulțimea părților lui A. Arătați că $(\mathcal{P}(A), \Delta)$ e grup abelian, unde

$$X \Delta Y \overset{def}{:=} (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X), \quad (\forall)\, X, Y \in \mathcal{P}(A)$$

6) Arătați că orice semigrup se poate scufunda într-un monoid.
$(\mathbb{Z}_4, \cdot)$ este un monoid care nu se poate scufunda într-un grup.

7)* Fie S un semigrup comutativ. Arătați că S se poate scufunda într-un grup $\Leftrightarrow$ S este "semigrup cu simplificare" (i.e. $ax = ay \Rightarrow x = y$).

8) a) Arătați că $f : M_1 \longrightarrow M_2$ este un morfism injectiv de monoizi $\Leftrightarrow$ f este monomorfism de monoizi.

b) Arătați că $i : (\mathbb{Z}, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{Q}, \cdot)$, $i(x) = x$, $(\forall)\, x \in \mathbb{Z}$ este epimorfism de monoizi care nu e surjectiv.

9) Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Dați exemplu de un monoid, care nu e grup, finit (resp. infinit) care are exact n elemente inversabile.

10) a) Arătați că monoizii $(M_2(\mathbb{Z}),\cdot)$ și $(M_3(\mathbb{Z}),\cdot)$ sunt neizomorfi. Generalizare.

b) Arătați că monoizii $(\mathbb{N}^*,\cdot)$ și $(3\mathbb{N}+1,\cdot)$ sunt neizomorfi.

11) Fie $M := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, a,b,c,d \in \mathbb{Z},\ a+b=c+d \right\}$

Să se arate că $(M,\cdot)$ e un monoid cu înmulțirea uzuală a matricilor și determinați $U(M)$.

GRUPURI

12) Pe mulțimea $(-1,1)$ definim legea de compoziție

$$x * y := \frac{x+y}{1+xy}, \quad (\forall)\, x,y \in (-1,1).$$

Arătați că $((-1,1),*)$ este un grup izomorf cu $((0,+\infty),\cdot) = (\mathbb{R}^*_+,\cdot)$.

13) Fie $a,b \in \mathbb{Q}$ și $\mu_{a,b} : \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$

$$\mu_{a,b}((x,y)) := (x+a,\ by), \quad (\forall)\,(x,y) \in \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}.$$

Arătați că $\left\{ \mu_{a,b} \,\middle|\, a \in \mathbb{Q},\ b \in \mathbb{Q}\setminus\{0\} \right\}$ este un subgrup în grupul de permutări $\Sigma_{\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}} = S_{\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}}$

14) Fie $(G, \cdot)$ un <u>semigrup</u> a.î.:

- $(\exists)\ e \in G$ a.î. $ex = x$, $(\forall)\ x \in G$
- $(\forall)\ x \in G$ $(\exists)\ x' \in G$ a.î. $x'x = e$

Atunci $(G, \cdot)$ este grup.

15) Fie G un grup, $H \subseteq G$, H = <u>finită</u>.
Dacă H e parte stabilă (i.e. $xy \in H$, $(\forall)\ x, y \in H$)
$\Rightarrow H \leq G$.

<u>Temă de referat</u> (teorema Horrocks) Fie G = grup,
$X = \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq G$ a.î. $x_i x_j \in X$, $(\forall)\ 1 \leq i \leq j \leq n$.
Atunci $X \leq G$.

16) Fie G = grup, $H, K \leq G$. Atunci $H \cup K \leq G$
$\Leftrightarrow H \subseteq K$ sau $K \subseteq H$.

17). Fie G un grup a.î. $x^2 = 1$, $(\forall)\ x \in G$. Atunci
G e abelian.

18) a) Întocmiți tabla grupului lui Klein $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.
b) Arătați că $S_3 = \langle (12), (123) \rangle$

19) (ordinul unui element). Fie G = grup, $x, y \in G$
$\sigma(x) = m$, $\sigma(y) = n$.

a) Dacă <u>$(m, n) = 1$</u> și <u>$xy = yx$</u> $\Rightarrow \sigma(xy) = mn$

b) $\sigma(x^k) = \dfrac{m}{(m, k)}$, $(\forall)\ k \in \mathbb{N}^*$

c) Numărul de generatori ai lui $\langle x \rangle$ este $\varphi(m)$

d) Dacă $g \in G$, $\sigma(g) = mn$ și $(m,n) = 1$

$\Rightarrow (\exists!)\ g_1, g_2 \in G$ a.î. $g = g_1 g_2 = g_2 g_1$

și $\sigma(g_1) = m$, $\sigma(g_2) = n$.

20) (grupuri de ordin 4 și 6)

a) G = grup, $|G| = 4 \Rightarrow G \simeq \mathbb{Z}_4$ sau $G \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

b) G = grup, $|G| = 6 \Rightarrow G \simeq \mathbb{Z}_6$ sau $G \simeq S_3$.

Temă de referat 1) G = grup, $|G| = 8 \Rightarrow G$ este izomorf cu $\mathbb{Z}_8$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, D_4 (grupul diedral) sau Q (grupul cuaternionilor).

2) G = grup, $|G| = 9 \Rightarrow G \simeq \mathbb{Z}_9$ sau $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$.

3) G = grup, $|G| = 10 \Rightarrow G \simeq \mathbb{Z}_{10}$ sau D_5 (grupul diedral).

21) Fie G = grup abelian finit, $|G| = p_1 p_2 \cdots p_n$, unde $p_1, \dots p_n$ sunt numere prime distincte. Atunci G este ciclic.

CONS: G = abelian, $|G| = 30 \Rightarrow G \simeq \mathbb{Z}_{30}$.

22) a) Fie G, H = grupuri, $g \in G$, $\sigma(g) = m$, $h \in H$ a.î. $\sigma(h) = n$. Atunci $\sigma((g,h)) = [m,n]$ în grupul produs direct $G \times H$.

b) Găsiți elementele de ordin 4 (resp. 6) din grupul $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{15}$ (resp. $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{36}$)

23)* Fie G = grup, $H \trianglelefteq G$, $K \trianglelefteq G$ a.î. $G = HK$ şi $H \cap K = 1$. Arătaţi că $G \simeq H \times K$ (izo. de grupuri). Ce se întâmplă dacă $K \ntrianglelefteq G$ ci doar $K \leq G$?

24) a) Să se arate că pe orice mulţime nevidă se poate defini o structură de grup.
b) Definiţi explicit o structură de grup pe $\mathbb{N}$.

25) Daţi exemplu de două grupuri neizomorfe, dar fiecare este izomorf cu un subgrup în celălalt.

26) Fie K un corp cu cel puţin trei elemente. Atunci grupurile $(K^*, \cdot)$ şi $(K, +)$ nu sunt izomorfe.

27) a) Arătaţi că singurul morfism de grupuri $(\mathbb{Q}, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}, +)$ este morfismul nul.
b) Arătaţi că grupurile $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ sunt două câte două neizomorfe.

28) Arătaţi că perechile de grupuri de mai jos nu sunt izomorfe:
$(\mathbb{Z}, +) \not\simeq (\mathbb{Z}[X], +)$, $(\mathbb{Q}, +) \not\simeq (\mathbb{Q}[X], +)$
$(\mathbb{Z}[X], +) \not\simeq (\mathbb{Q}[X], +)$

29) Arătaţi că $(\mathbb{Q}^*, \cdot) \simeq (\mathbb{Z}_2, +) \times (\mathbb{Z}[X], +)$ (izo de grupuri)

30) Fie $(\mathbb{Q},+)$ grupul numerelor raționale. Atunci

a) Dacă $H \leq (\mathbb{Q},+)$ a.î. $H + \mathbb{Z} = \mathbb{Q} \Rightarrow$ $\underline{H = \mathbb{Q}}$

b) Dacă $H \leq (\mathbb{Q},+)$ e finit generat $\Rightarrow H$ este ciclic.

c) $(\mathbb{Q},+)$ __nu__ e un grup finit generat.

d) $\mathbb{Q} \not\cong \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

e) $(\mathbb{Q},+)$ __nu__ are un sistem minimal de generatori pt $(\mathbb{Q},+)$; mai precis, dacă S e un sistem de generatori și $0 \neq s \in S \Rightarrow S \setminus \{s\}$ e sistem de generatori pentru $\mathbb{Q}$.

31) (grupuri divizibile) Un grup $(G,+)$ s.n. __divizibil__ dacă $nG = G$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$, i.e. $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$, $(\forall)\, x \in G$ $(\exists)\, y \in G$ a.î. $x = ny := \underbrace{y + \dots + y}_{\text{de } n \text{ ori}}$

Arătați că:

a) G = grup divizibil, $|G| \neq 1 \Rightarrow G$ e infinit

b) Dacă $f : G \longrightarrow H$ e morfism surjectiv de grupuri și G = __divizibil__ $\Rightarrow H$ e __divizibil__

c) $1 \neq H \leq G$ = divizibil $\not\Rightarrow$ H e divizibil.

d) Fie $G := \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ cu legea:

$$(a, x) * (b, y) := (ab, ay + x).$$

Arătați că $(G, *)$ e grup __divizibil neabelian__.

32) Fie G = grup **divizibil** și H = **grup finit**.
Atunci **singurul** morfism de grupuri $f : G \to H$ este cel **trivial**, i.e. $f(g) = 1$, $(\forall)\ g \in G$.

Consecință: $|Hom(\mathbb{Q}, S_n)| = |Hom(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_4)|$
$= |Hom(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8 \times S_3)| = 1$

33) Să se arate următoarele **izomorfisme** de grupuri:
$Aut(\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_2$; $Aut(\mathbb{Z}_n) \simeq (U(\mathbb{Z}_n), \cdot)$;
$Aut(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \simeq S_3$; $Aut(S_3) \simeq S_3$;
unde $(Aut(G), \circ)$ este grupul automorfismelor lui G.

Temă referat (teorema Hölder, 1895). Dacă $n \geq 3$ și $n \neq 6$ $\Longrightarrow Aut(S_n) \simeq S_n$ (i.e. orice automorfism al lui S_n este **interior**). Pentru **$n = 6$**, S_6 are un automorfism care nu e interior numit **excepțional** (sau **exotic**!).
Descoperiți care este!

34) Fie G un grup, $N \leq G$, $N \subseteq Z(G)$. Atunci:
a) $N \trianglelefteq G$; b) Dacă G/N e ciclic $\Longrightarrow G$ e abelian
c) Dacă $(Aut(G), \circ)$ e grup ciclic $\Longrightarrow G$ e abelian

35) Fie G un grup. Atunci $Aut(G) \not\simeq \mathbb{Z}_{2n+1}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

36) Fie G un grup a.î. $Z(G) = 1$. Atunci $Z(Aut(G)) = 1$

37) Fie $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq 2$. Determinați toate morfismele între grupurile $(\mathbb{Z}_m, +)$ și $(\mathbb{Z}_n, +)$.

38) Fie $n \geq 2$. Atunci S_n se poate scufunda în grupul matricilor inversabile $GL(n, \mathbb{C}) := \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid A$ in

39) Fie $G = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$. Atunci
$H \leq (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +) \iff (\exists)$ numerele întregi $x_1 \geq 0$ și $0 \leq y_1 < y_2$ a.î.

$$H = \langle (x_1, y_1), (0, y_2) \rangle$$

40) a) Să se descrie toate subgrupurile lui $\mathbb{Z}_{12}$ și calculați toate grupurile factor.
b) Același enunț pentru $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_6$, $\mathbb{Z}_{18}$.

41) Arătați că $f : \mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / \langle (2,3) \rangle$, $f(m) := \widehat{(m, m)}$, $(\forall)\, m \in \mathbb{Z}$ este izomorfism de grupuri.

42) Calculați elementele de <u>ordinul doi</u> din grupul factor $(\mathbb{R}, +) / \langle \{\sqrt{2}, \sqrt{3}\} \rangle$ și arătați că

$$(\mathbb{R}, +) / \langle \{\sqrt{2}, \sqrt{3}\} \rangle \not\cong (\mathbb{R}, +) / \mathbb{Z}.$$

43) Să se demonstreze următoarele izomorfisme de grupuri:

a) $(\mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}, +) \simeq (U, \cdot) := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$

b) $(\mathbb{Q}/_{\mathbb{Z}}, +) \simeq (U_\infty, \cdot) \overset{def}{:=} \{ z \in \mathbb{C} \mid (\exists)\ n \in \mathbb{N}^*,\ z^n = 1 \}$

c) $(\mathbb{R}/_{\mathbb{Q}}, +) \simeq (\mathbb{R}, +)$

d) $(U/_{U_\infty}, \cdot) \simeq (\mathbb{R}, +)$

e) $(\mathbb{C}/_{\mathbb{Z}}, +) \simeq (U, \cdot)$

f) $(\mathbb{C}^*, \cdot) \simeq (\mathbb{R}, +) \times (\mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}, +)$.

44) Fie G_1, G_2 două grupuri. Atunci

a) Dacă $f : G_1 \xrightarrow{\sim} G_2$ este izomorfism și $H \trianglelefteq G_1$
$\Rightarrow f(H) \trianglelefteq G_2$ și $G_1/_H \simeq G_2/_{f(H)}$

b) Dacă $H_1 \trianglelefteq G_1$ și $H_2 \trianglelefteq G_2 \Rightarrow H_1 \times H_2 \trianglelefteq G_1 \times G_2$ și

$$G_1 \times G_2 /_{H_1 \times H_2} \simeq G_1/_{H_1} \times G_2/_{H_2}.$$

45) Să se arate că există un izomorfism de grupuri:

$$(\mathbb{C}^*/_{\mathbb{R}^*}, \cdot) \simeq (U/_{U_2}, \cdot), \quad U_2 = (\{1, -1\}, \cdot)$$

Temă (grupul $\mathbb{C}_{p^\infty}$) Fie p = nr. prim, $n \in \mathbb{N}$ și

$H_n := \{ z \in \mathbb{C} \mid z^{p^n} = 1 \}$, $\mathbb{C}_{p^\infty} := \bigcup_{n \geq 0} H_n$.

Arătați că $(\mathbb{C}_{p^\infty}, \cdot)$ e divizibil și $\mathbb{C}_{p^\infty}/_H \simeq \mathbb{C}_{p^\infty}$, $(\forall)\ 1 \neq H \lneq \mathbb{C}_{p^\infty}$.

46) Fie G_1, G_2 două grupuri, $H_1 \trianglelefteq G_1$, $H_2 \trianglelefteq G_2$.

Atunci:

a) $H_1 \simeq H_2$, $G_1 \simeq G_2 \not\Rightarrow G_1/H_1 \simeq G_2/H_2$.

b) $G_1 \simeq G_2$ și $G_1/H_1 \simeq G_2/H_2 \not\Rightarrow H_1 \simeq H_2$.

c) $H_1 \simeq H_2$, $G_1/H_1 \simeq G_2/H_2 \not\Rightarrow G_1 \simeq G_2$.

47) Fie G un grup finit, $H, K, L \leq G$. Atunci:

a) $|HK| \cdot |H \cap K| = |H| \cdot |K|$.

b) $[G : H \cap K] \leq [G : H] \cdot [G : K]$.

Dacă $([G : H], [G : K]) = 1 \Rightarrow$ are loc egalitate și în plus $G = HK$.

c) Dacă $K \subseteq H \Rightarrow [L \cap H : L \cap K] \leq [H : K]$

48) Fie G = grup finit, $K, K \leq G$. Atunci:

a) $|\langle H \cup K \rangle : K| \geq |H : H \cap K|$

b) Dacă $|H : H \cap K| > \frac{1}{2} |G : K| \Rightarrow G = \langle H \cup K \rangle$

49)* Fie $(G, +)$ = grup abelian finit generat a.î. $o(x) = \infty$, $(\forall)\, x \neq 0$. Atunci, G este grup liber (i.e. G are un sistem de generatori care sunt liniar independenți peste $\mathbb{Z}$).

Temă REFERAT Arătați că $(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, +)$ nu este grup liber.

50) Fie $G := \langle f, g \rangle \leq \Sigma_{\mathbb{R}}$, unde
$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x+1$, $g(x) = 2x$.
Arătați că grupul G (f.g.) are un subgrup care nu e finit generat.

Temă 1) Fie G = grup finit generat, $H \leq G$ a.î. $|G : H| < \infty$ este finit. Arătați că H e finit generat.
2) Arătați că orice grup cu 100 de elemente poate fi generat cu cel mult 6 elemente.

51) (inima/interiorul normal al unui subgrup)
Fie $H \leq G$ și $H_G := \bigcap_{x \in G} (xHx^{-1})$, unde $xHx^{-1} = \{xhx^{-1} \mid h \in H\}$. Atunci:

a) $H_G \trianglelefteq G$, $H_G \subseteq H$.

b) H_G este "cel mai mare" subgrup normal al lui G inclus în H: i.e.
$N \trianglelefteq G$ și $N \subseteq H \implies N \subseteq H_G$.

c) Dacă $|G : H| = n \implies G/H_G$ se scufundă în S_n

52) Fie G = grup simplu (i.e. fără subgrupuri normale netriviale) infinit. Atunci G nu are subgrupuri proprii de indice finit.

53) Fie G = grup divizibil, netrivial. Atunci G nu are subgrupuri proprii de indice finit.

Teme de studiu 1) Construiți un grup simplu infinit.

2) Fie G un grup finit generat și $n \in \mathbb{N}^*$. Arătați că mulțimea $\mathcal{L}_n := \{ H \leq G \mid |G:H| = n \}$ este finită și $\bigcap_{K \in \mathcal{L}_n} K \trianglelefteq G$.

54) a) Să se descrie toate subgrupurile și toate subgrupurile normale ale lui D_4 și faceți diagramele lor Hasse.

b) Calculați centrul grupului diedral $Z(D_n)$, $n \geq 3$