SEMINARII, ALGEBĂ, ANUL I, sem. 1

Probleme

1) Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuațiile:

a) $x^3 - 3x + 1 = 0$

b) $x^4 - 2x^2 + 8x - 3 = 0$

c) Calculați $\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{9}\right)$ și $\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) \cdot \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) \cdot \cos\left(\frac{8\pi}{9}\right)$.

2) (de Morgan) Fie X o mulțime și $(A_i)_{i \in I}$ o familie de submulțimi în X. Atunci:

$$\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i} \quad \text{și} \quad \overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i},$$

unde pentru $Y \subseteq X$, $\overline{Y} = C_X(Y) = X \setminus Y$.

3) Fie $f : A \longrightarrow B$ o funcție și $(A_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{P}(A)$, $(B_j)_{j \in J} \subseteq \mathcal{P}(B)$. Atunci:

a) $f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$

b) $f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(A_i)$. Dacă f este injectivă are loc egalitate.

c) Dați un exemplu în care incluziunea la b) este strictă!

d) $f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(B_j)$

e) $f^{-1}\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j)$.

4) Fie $f : A \longrightarrow B$ o funcție și definim

$f_* : \mathcal{P}(A) \longrightarrow \mathcal{P}(B)$, $f_*(X) := f(X)$

$f^* : \mathcal{P}(B) \longrightarrow \mathcal{P}(A)$, $f^*(Y) := f^{-1}(Y)$.

S.E.A:

a) f e <u>injectivă</u>; b) f_* <u>este injectivă</u>

c) $f^* \circ f_* = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}(A)}$; d) <u>$f^*$ este surjectivă</u>

e) $f(X_1 \cap X_2) = f(X_1) \cap f(X_2)$, $(\forall)\, X_1, X_2 \subseteq A$.

f) $f(A \setminus X) \subseteq B - f(X)$, $(\forall)\, X \subseteq A$.

Dual, avem.

5) In ipotezele și cu notațiile de la Ex 4) arătați că sunt echivalente afirmațiile:

a) f <u>e surjectivă</u>; b) f_* <u>este surjectivă</u>;

c) $f_* \circ f^* = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}(B)}$; d) f^* <u>este injectivă</u>.

e) $B \setminus f(X) \subseteq f(A \setminus X)$, $(\forall)\, X \subseteq A$.

6) Să se calculeze imaginea funcțiilor:

a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \dfrac{5}{3+x^2}$

b) $f : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad f(m,n) = m^2 - n^2$

Pentru fiecare din funcții calculați $f^{-1}(0)$.

c) $g : \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{5}\right\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{5}\right\}$

$g(x) = \dfrac{2x-1}{5x-1}$. Dacă g e bijectivă calculați inversa ei g^{-1}.

7) Să se precizeze care din funcțiile de mai jos sunt injective, surjective, bijective. Pentru cele injective (resp. surjective) calculați o retractă (resp. secțiune) iar pentru cele bijective calculați inversa:

a) $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R}, \quad f(x,y) = (2x+1,\ 2y+x^2)$

b) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad f(m) = \begin{cases} 0, & m \leq 5 \\ m-5, & m \geq 6 \end{cases}$

c) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad f(n) = \left[\dfrac{n}{2}\right]$

d) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad f(n) = 3n+2$

e) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}, & \text{dacă } x = \text{par} \\ -\dfrac{x-1}{2}, & \text{dacă } x = \text{impar} \end{cases}$

8) Arătaţi că funcţiile de mai jos sunt <u>bijective</u>:

a) $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$, $f(n) := \begin{cases} 2n, & n \geq 0 \\ -2n+1, & n < 0 \end{cases}$

b) $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $f(m,n) := 2^m(2n+1) - 1$

c)* $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $g(m,n) = 1 + 2 + \dots + (m+n) + m$

CONS: $(\forall)\, x \in \mathbb{N}$ $(\exists!)\, m, n \in \mathbb{N}$ a.î. $2x = (m+n)^2 + 3m +$

9) Fie X, Y, Z trei mulţimi. Atunci funcţia

$$\alpha : \mathrm{Hom}(X, \mathrm{Hom}(Y, Z)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(X \times Y, Z)$$

$$\alpha(f)((x,y)) := f(x)(y)$$

este <u>bijectivă</u>

10) Fie X o mulţime. Atunci funcţia:

$$\varphi : \mathcal{P}(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(X, \{0,1\})$$ definită

prin:

$$\varphi(A)(x) := \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \in X - A \end{cases}$$

$(\forall)\, A \subseteq X$, $x \in X$ este <u>bijectivă</u>.

$\varphi(A) \overset{not}{=} \varphi_A$ s.n. <u>funcţie caracteristică</u> a lui $A \subseteq X$

11) (principiul includerii și excluderii) Fie $A_1, \dots A_n$ mulțimi finite. Atunci:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \dots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots A_n|.$$

12) Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$, $A = \{1, 2, \dots m\}$, $B = \{1, 2 \dots n\}$.

Calculați:

a) numărul tuturor funcțiilor $f : A \longrightarrow B$;

b) — " — " — injective $f : A \to B$

c) — " — " — surjective $f : A \to B$

d) — " — " — bijective $f : A \to B$.

13) Fie A o mulțime. S.E.A:

a) A este finită; b) Orice funcție injectivă $f : A \to A$ este bijectivă; c) Orice funcție surjectivă $g : A \to A$ este bijectivă;

14) a) Fie A o mulțime numărabilă și $i : B \longrightarrow A$ o funcție injectivă. Atunci B este finită sau numărabilă.

b) Fie A = mulțime numărabilă și $p : A \to B$ o funcție surjectivă. Atunci B este finită sau numărabilă.

15)* Fie $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o familie numărabilă de mulțimi numărabile. Atunci $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ este o mulțime numărabilă.

16)* Arătați că $\cancel{(\exists)}$ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție a.î. $|f(x)-f(y)|>1$, $(\forall)\, x\neq y\in\mathbb{R}$.

17) Construiți o funcție $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ injectivă și nesurjectivă (resp. surjectivă și neinjectivă).

18) Care din următoarele relații binare sunt reflexive, simetrice, antisimetrice sau tranzitive:

a) $\underline{\mathbb{N}}$, $n\rho m \overset{def}{\iff} (\exists)\, k\in\mathbb{N},\ k\neq 0$ a.î. $m=kn$

b) $\mathbb{Z}$, $n\rho m \overset{def}{\iff} n^2+n=m^2+m$, $(\forall)\, m,n\in\mathbb{Z}$.

c) $\mathbb{R}$, $x\rho y \overset{def}{\iff} |x|\leq|y|$, $(\forall)\, x,y\in\mathbb{R}$

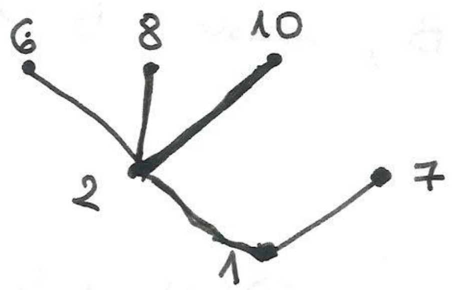
d) $\mathbb{Z}$, $n\rho m \overset{def}{\iff} n^2+m^2=2$, $(\forall)\, n,m\in\mathbb{Z}$

<u>Diagrama Hasse</u> a unei mulțimi parțial ordonate $(X,\leq)$.

Fie $(X,\leq)$ o mulțime parțial ordonată <u>finită</u>. Elementele lui X sunt notate cu <u>puncte</u> • și dacă $x,y\in X$ cu $x\leq y$ și $x\neq y$ atunci punctul corespunzător lui x îl scriem "mai jos" decât cel al lui y. Două puncte corespunzătoare lui x și y le <u>unim</u> printr-un segment $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$

$x \le y$, $x \neq y$ și $(\nexists)$ $z \in X$ a.î. $x \le z$, $z \le y$ și $x \neq z \neq y$.

<u>Exemplu</u> Fie $X := \{1, 2, 6, 7, 8, 10\}$ cu relație de ordine $x \le y \overset{def}{\Longleftrightarrow} x \mid y$ (divide!). Diagrama Hasse este:



<u>Utilitate practică</u> ! a găsi majoranți/minoranți, elemente maximale/minimale prim/ultim element.

19) a) Scrieți diagrama Hasse pentru $(\mathcal{P}(\{a, b, c\}), \subseteq)$ și a mulțimii $(X := \{n \in \mathbb{N}^* \mid n \mid 30\}, \mid)$ cu relație de ordine de divizibilitate. Comparați-le!

b) Scrieți diagrama Hasse pentru $(\{3, 5, 30, 45\},$ cu relație de divizibilitate.

c) Scrieți diagrama Hasse pentru mulțimea $(X := \{k \in \mathbb{N}^* \mid k \mid 24\}, \mid)$ și calculați majoranți/minoranți, supremum/infimul mulțimii $Y := \{2, 3, 4, 6, 24\} \subseteq X$, dacă există!

20) Pe $\mathbb{R}$ definim relația: $x \sim y \overset{def}{\Longleftrightarrow} x - y \in \mathbb{Z}$.

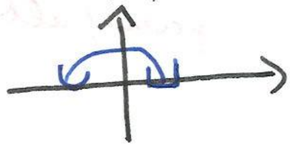
Arătați că $\mathbb{R}/_{\sim} \simeq [0, 1)$

21) Pe $\mathbb{C}^*$ definim relația $z_1 \sim z_2 \overset{def}{\iff} \arg(z_1) = \arg(z_2)$

Atunci $\mathbb{C}^*/_{\sim} \simeq [0, 2\pi)$

22) Fie $\mathcal{D}$:= mulțimea dreptelor dintr-un plan fixat și pe $\mathcal{D}$ relația: $d_1 \sim d_2 \overset{def}{\iff} \begin{cases} d_1 = d_2 \text{ sau} \\ d_1 \cap d_2 = \emptyset \end{cases}$

Arătați că $\mathcal{D}/_{\sim} \simeq B$, unde B este <u>semicercul</u> unitate



23) Fie $B \subseteq A$ și pe $\mathcal{P}(A)$ definim relația:

$X \sim Y \overset{def}{\iff} X \cap B = Y \cap B$. Atunci

$$\mathcal{P}(A)/_{\sim} \simeq \mathcal{P}(B).$$

24) (produs de relații) Fie $A_1, \dots, A_n$ mulțimi și $\rho_1, \dots, \rho_n$ relații de echivalență pe $A_1, \dots$ <u>resp.</u> A_n

Pe $A_1 \times \dots \times A_n$ definim relația:

$(a_1, \dots, a_n) \sim (b_1, \dots, b_n) \overset{def}{\iff} a_i \, \rho_i \, b_i$, $(\forall)\, i = \overline{1,n}$

Arătați că $\sim$ e relație de echivalență și

$$A_1 \times \dots \times A_n/_{\sim} \simeq A_1/_{\rho_1} \times A_2/_{\rho_2} \times \dots \times A_n/_{\rho_n}.$$

25)* Să se calculeze numărul tuturor relațiilor de echivalență care se pot defini pe o mulțime cu n elemente, $n \in \mathbb{N}^*$.

26)* Fie X și Y mulțimi nevide. Arătați că:
$|X| \leq |Y|$ sau $|Y| \leq |X|$.
(i.e. fie $(\exists)$ $f: X \longrightarrow Y$ injectivă sau $g: Y \longrightarrow X$ inj.)

$\Rightarrow$ CONS: Orice mulțime de numere cardinale e total ordonată