MULTIMI SI FUNCTII

Conceptul de mulțime este unul fundamental în matematică. El nu are o definiție riguroasă ci doar una intuitivă.

Scurt istoric: Bolzano în 1847 a dat următoarea:

"Definiție": O mulțime e o materializare a conceptului care ne vine în minte atunci când privim aranjamentul părților sale drept o chestiune care nu contează.

Inițiatorul și cel care a pus bazele dezvoltării teoriei mulțimilor a fost Georg Cantor (1845-1918)

"Definiție" intuitivă (Cantor): Prin mulțime înțelegem o "colecție" de obiecte care se numesc elementele mulțimii.

Ce este o "colecție"? Faptul că un ~~element~~ "obiect" a este element al mulțimii A se notează cu $a \in A$ (notație introdusă de Peano în 1889).

Cantor a publicat două articole fundamentale care pun bazele teoriei mulțimor: primul în 1874 (anul de naștere al teoriei mulțimilor) și al doilea în 1878. In aceste articole Cantor a definit două tipuri de infinit, a arătat că $\mathbb{R}$ nu e numărabilă, că există o infinitate de numere transcendente în orice interval, a introdus conceptul de echivalență a mulțimilor (cardinal), de numere cardinale și ordinale.

- 1897 : anul în care au apărut paradoxurile în teoria mulțimilor: C. Burali-Forti : "Numărul ordinal al mulțimii tuturor ordinalelor trebuie să fie un număr ordinal și asta conduce la o contradicție"!

Cel mai ușor de explicat e paradoxul lui B. Russell din 1902 :

"Fie $A \overset{def}{:=} \{X \mid X$ nu e membru al lui $X\}$.

Este A un element al lui A ?"

Pentru evitarea lor Zermelo (1908) și Frankel (1921) au propus primul set de opt axiome (axiomele Zermelo-Frankel). De exemplu axioma 3 a lui ZF a fost introdusă să evite / elimine paradoxul lui Russell. Axioma 4 (axioma perechilor) permite construcția produsului cartezian; ea se formulează astfel: "dacă x și y și mulțimi, atunci există o mulțime care conține x și y ca elemente".

Ulterior celor opt axiome formulate de Zermelo-Frankel s-a introdus și axioma alegerii (o vom enunța mai încolo) echivalentă cu axioma "bunei-ordonări" inclusă ca axioma 9 în ZF.

Operații cu mulțimi

Există o mulțime $\emptyset$ care nu are nici un element, și s.n. mulțimea vidă. (obs: asta e o consecință a celor 9 axiome Z-F).

Două mulțimi A și B sunt egale dacă au aceleași elemente (asta e prima axiomă ZF s.n. axioma de extensionalitate). Exemplu: $\{1,2\} = \{2,1\}$. Dacă A și B sunt mulțimi: $A \subseteq B$ (A e inclusă în B) dacă orice element al lui A este și element în B. Notăm cu

$\mathcal{P}(A) := \{X \mid X \subseteq A\}$ s.n. mulțimea părților lui A (existența ei este axioma 8 din sistemul ZF).

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}, \quad \mathcal{P}(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}.$$

Exercițiu Scrieți elementele mulțimilor $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$ și $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$.

Fie A, B două mulțimi. Definim:

$A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$ reuniunea lui A cu B

Existența acestei mulțimi este consecința axiomei 5 (axioma reuniunii) din sistemul ZF.

<u>Axioma 5 (a reuniunii)</u> ~~[illegible]~~ e mai generală și se enunță astfel: dacă $(A_i)_{i\in I}$ este o mulțime de mulțimi atunci există mulțimea:

$$\bigcup_{i\in I} A_i := \{x \mid (\exists)\, i\in I \text{ a.î. } x\in A_i\}.$$

numită <u>reuniunea</u> familiei de mulțimi $(A_i)_{i\in I}$

$$A\cap B := \{x \mid x\in B \text{ și } x\in A\} \text{ s.n.}$$

<u>intersecția</u> mulțimilor A și B.

$$A\setminus B := \{x \mid x\in A \text{ și } x\notin B\} \text{ s.n.}$$

<u>diferența</u> dintre A și B.

Dacă $A\subseteq X$ este submulțime în X atunci $C_X(A) \overset{def}{:=} X - A \overset{not}{=} \overline{A}$ s.n. <u>complementara</u> lui A în X.

<u>Exerciții</u> 1) Fie A, B, C trei mulțimi. Atunci:

1) $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$

2) $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$

3) (De Morgan) Dacă $A, B\subseteq C \Rightarrow$

$$\overline{A\cup B} = \overline{A}\cap\overline{B} \text{ și } \overline{A\cap B} = \overline{A}\cup\overline{B}$$

Definiție (Kuratowski) Fie A, B două mulțimi și $a \in A$, $b \in B$. S.n. pereche ordonată a elementelor a și b mulțimea notată (a, b) definită prin:

$$(a, b) \stackrel{def}{:=} \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Notăm $A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ și s.n. produsul cartezian (direct) al mulțimilor A și B. Existența perechii ordonate este asigurată, în sistemul ZF, de axioma 4 (a perechilor) care se enunță astfel: "dacă A și B sunt mulțimi, atunci există o mulțime care conține pe A și B ca elemente", i.e. există mulțimea $\{A, B\}$.

Observație 1) Fie $a, a' \in A$ și $b, b' \in B$. Atunci

$$(a, b) = (a', b') \iff a = a' \text{ și } b = b'$$

(Exercițiu!)

2) $A \times \emptyset = \emptyset$, $\emptyset \times A = \emptyset$, pentru orice mulțime A.

Produsul cartezian este cheie pentru a defini noțiunea de funcție.

Definiție (Kuratowski) Fie A, B două mulțimi. S.n. *funcție* (aplicație) f de la A la B și o să notăm $f : A \longrightarrow B$ o submulțime $f \subseteq A \times B$ a.î.: $(\forall)\, a \in A \; (\exists!)\, b_a \in B$ a.î. $(a, b_a) \in f$. Acest unic b_a îl notăm cu $f(a)$.

A s.n. *domeniul de definiție* al lui f iar B *codomeniul* lui f.

Notația $f : A \longrightarrow B$ a apărut abia în 1941!

Până atunci se nota $f(A) \subseteq B$.

Definiții de bază: Fie $f : A \longrightarrow B$ o funcție.

- Mulțimea $G_f := \{ (a, f(a)) \mid a \in A \} \subseteq A \times B$ s.n. *graficul* lui f.
- $Hom(A, B) := \{ f : A \longrightarrow B \mid f = \text{funcție} \} \stackrel{not}{=} B^A$
- Dacă $A' \subseteq A$, $f(A') \stackrel{def}{:=} \{ f(a') \mid a' \in A' \} \subseteq B$ s.n. *imaginea* lui A' prin f. Dacă $A' := A$ atunci $f(A) \stackrel{not}{=} \underline{Im(f)}$ s.n. *imaginea* lui f

- Dacă $B' \subseteq B$, atunci

$$\overset{-1}{f}(B') \overset{def}{:=} \{a \in A \mid f(a) \in B'\} \text{ s.n.}$$

imaginea inversă (fibra) lui B' prin f.

Exemplu Fie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

$$\Longrightarrow f([-7, 2]) = [0, 49] \text{ și } \overset{-1}{f}([0,1]) = [-1,1]$$

$$\overset{-1}{f}(\{-1\}) = \phi.$$

Întrebare Fie A o mulțime nevidă. Există o funcție $f : \phi \longrightarrow A$? Dar o funcție

$$f : A \longrightarrow \phi \text{ ?}$$

- Două funcții $f : A \longrightarrow B$ și $g : C \longrightarrow D$ sunt egale $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $A = C$, $B = D$ și $f(a) = g(a)$, $(\forall)\ a \in A$.

- Compunerea funcțiilor Fie $f : A \to B$ și $g : B \longrightarrow C$ două funcții. Funcția $g \circ f$ definită prin:

$$g \circ f : A \longrightarrow C, \quad (g \circ f)(a) \overset{def}{:=} g(f(a)),$$

$(\forall)\ a \in A$ s.n. compunerea funcțiilor f și g.

Propoziție (asociativitatea compunerii funcțiilor) Fie funcțiile $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$. Atunci, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Dem: $h \circ (g \circ f)$ și $(h \circ g) \circ f : A \longrightarrow D$.

Fie $a \in A$. Atunci:

$$(h \circ (g \circ f))(a) = h((g \circ f)(a)) = h(g(f(a))),$$ și

$$((h \circ g) \circ f)(a) = (h \circ g)(f(a)) = h(g(f(a)))$$

$\boxtimes$

- Funcție identică pe o mulțime. Fie A o mulțime nevidă. Funcția

$$Id_A : A \longrightarrow A, \quad Id_A(a) := a, \ (\forall)\, a \in A$$

s.n. funcția identică a lui A. $Id_A \overset{not}{=} 1_A$

obs: Dacă $f : A \longrightarrow B$ e funcție $\Longrightarrow$

$$f \circ Id_A = f \text{ și } Id_B \circ f = f.$$

Exercițiu: Dați exemplu de două funcții $f, g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ a.î. $f \circ g \neq g \circ f$.

- Dacă $A \subseteq B$ există o funcție

$$i : A \longrightarrow B, \quad i(a) := a, \ (\forall)\, a \in A$$

numită incluziunea lui A în B.

- Funcții injective, surjective, bijective.

Obs: Prin convenție toate mulțimile vor fi nevide.

Definiție: Fie $f : A \longrightarrow B$ o funcție. Atunci:

1) f s.n. injectivă dacă: $(\forall)\ a_1 \neq a_2 \in A \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$ (echivalent: dacă $f(x) = f(y)$ $(\forall)\ x, y \in A \Rightarrow x = y$).

2) f s.n. surjectivă dacă $\mathrm{Im}(f) = B$, i.e. $(\forall)\ b \in B\ (\exists)\ a \in A$ a.î. $b = f(a)$.

3) f s.n. bijectivă dacă este injectivă și surjectivă.

Obs: • $f : A \longrightarrow B$ nu e injectivă dacă $(\exists)\ a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$ și $f(a_1) = f(a_2)$

• f nu e surjectivă dacă $(\exists)\ b \in B$ a.î. $(\forall)\ x \in A$ avem că $f(x) \neq b$. $\boxtimes$

• $f : A \longrightarrow B$ e bijectivă $\Longleftrightarrow (\forall)\ b \in B\ (\exists!)\ a \in A$ a.î. $f(a) = b$.

Exemple 1) • $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, nu e injectivă

• $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, este injectivă

2) • $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, nu e surjectivă
• $f : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty)$, $f(x) = x^2$, este surjectivă

3) Fie A, B mulțimi nevide. Atunci

$\pi_1 : A \times B \longrightarrow A$, $\pi_1(a, b) := a$, $(\forall)(a, b)$

$\pi_2 : A \times B \longrightarrow B$, $\pi_2(a, b) := b$

sunt surjective s.n. proiecțiile canonice ale produsului direct pe cele două componente.

Exerciții 1) Găsiți o funcție $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ injectivă și nesurjectivă (respectiv, surjectivă și neinjectivă).

2) Fie $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$. Atunci:

a) $g \circ f$ injectivă $\Longrightarrow$ f injectivă

b) $g \circ f$ surjectivă $\Longrightarrow$ g surjectivă

c) f, g sunt injective (resp. surjective) $\Longrightarrow$ $g \circ f$ este injectivă (res. surjectivă).

3) Fie M o mulțime, $A, B \subseteq M$ și funcția $f : \mathcal{P}(M) \longrightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$, $f(X) := (X \cap A, X \cap B)$ $(\forall)\, X \in \mathcal{P}(M)$. Atunci:

f este injectivă (resp. surjectivă) $\Longleftrightarrow$ $A \cup B = M$ (resp $A \cap B = \emptyset$)

Teorema 1 (caracterizarea funcțiilor injective)

Fie $f : A \to B$ o funcție. S.E.A.:

a) f este injectivă;

b) f are o <u>retractă</u>: i.e. $(\exists)\ r : B \to A$ o funcție a.î. $r \circ f = \mathrm{Id}_A$.

c) f este <u>monomorfism</u>: i.e. $(\forall)\ X$ = mulțime și $(\forall)\ f_1, f_2 : X \to A$ funcții cu $f \circ f_1 = f \circ f_2$

$$X \underset{f_2}{\overset{f_1}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{f} B$$

avem că $f_1 = f_2$.

<u>Dem</u>: a) $\Rightarrow$ b). Pp. că f este injectivă. Vrem să construim o retractă $r : B \to A$.

Fie <u>$a_0 \in A$ fixat</u> (am presupus că mulțimile sunt nevide!)

și definim:

$$r : B \to A, \quad r(b) := \begin{cases} a, & \text{dacă } f(a) = b \\ a_0, & \text{dacă } b \notin \mathrm{Im}(f) \end{cases}$$

r este funcție! i.e. e corect definită căci f e injectivă. În adevăr,

$$f(a) = f(a') = b \implies a = a' \quad \text{i.e. } r(b) = a = a'$$

În plus, pentru orice $a \in A$ avem:

$$(r \circ f)(a) = r(f(a)) = a, \quad \text{căci } f(a) \in \mathrm{Im}(f),$$

i.e. r e retractă pentru f.

b) $\Rightarrow$ c) Fie $r: B \to A$ o retractă a lui f.

și $X \overset{f_1}{\underset{f_2}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{f} B$ a.î. $f \circ f_1 = f \circ f_2$

$\Rightarrow r \circ (f \circ f_1) = r \circ (f \circ f_2) \Rightarrow$ (asociativitate)

$(r \circ f) \circ f_1 = (r \circ f) \circ f_2 \Rightarrow Id_A \circ f_1 =$

$= Id_A \circ f_2 \Rightarrow \underline{f_1 = f_2}$.

c) $\Rightarrow$ a) Pp. prin absurd că f nu e injectivă

și fie $a_1 \neq a_2 \in A$ a.î. $f(a_1) = f(a_2)$.

Fie $X := \{0\}$ și funcțiile:

$X = \{0\} \overset{f_1}{\underset{f_2}{\rightrightarrows}} A$, $f_1(0) := a_1$, $f_2(0) := a_2$

evident $\underline{f_1 \neq f_2}$ căci $a_1 \neq a_2$ și $\underline{f \circ f_1 = f \circ f_2}$

căci $(f \circ f_1)(0) = f(a_1) = f(a_2) = (f \circ f_2)(0)$,

fals! Deci f e injectivă. $\boxtimes$

Exercițiu: Fie $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = 3n$.

Calculați o retractă pentru f. Calculați mai multe retracte pentru f.

Problemă de studiu: Fie $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ o funcție injectivă care are doar un număr finit de retracte. Este f surjectivă?

Teorema 2 (caracterizarea funcțiilor surjective)

Fie $f : A \to B$ o funcție. S.E.A.

a) f este surjectivă;

b) f are o "*secțiune*": i.e. $(\exists)\ s : B \to A$ a.î. $f \circ s = Id_B$.

c) f este "*epimorfism*": i.e. $(\forall)\ Y$ = mulțime și $(\forall)$ funcțiile $B \overset{f_1}{\underset{f_2}{\rightrightarrows}} Y$

$$A \xrightarrow{f} B \overset{f_1}{\underset{f_2}{\rightrightarrows}} Y \quad \text{cu } f_1 \circ f = f_2 \circ f$$

avem că $f_1 = f_2$.

Dem a) $\Rightarrow$ b) Fie $b \in B$. Cum f e surjectivă $(\exists)\ x \in A$ cu $f(x) = b$.

$\Rightarrow f^{-1}(b) \neq \emptyset$, i.e.

Acum vom folosi "axioma alegerii": pentru fiecare $b \in B$ alegem un element (și numai unul) $a_b \in f^{-1}(b)$, i.e. $f(a_b) = b$ și definim:

$$s : B \to A,\ s(b) := a_b,\ (\forall)\ b \in B$$

Atunci s este secțiune a lui f, căci pentru $b \in B$

$(f \circ s)(b) = f(s(b)) = f(a_b) = b$, i.e. $f \circ s = Id_B$.

b) $\Rightarrow$ c) Fie Y și f_1, f_2 ca la c). Atunci

$$f_1 \circ f = f_2 \circ f \Rightarrow (f_1 \circ f) \circ s = (f_2 \circ f) \circ s \Rightarrow$$

$f_1 \circ (f \circ s) = f_2 \circ (f \circ s) \Rightarrow f_1 \circ Id_B = f_2 \circ Id_B \Rightarrow$

$\underline{f_1 = f_2}$.

c) $\Rightarrow$ a) Pp. prin absurd că f nu e surjectivă

şi fie $b \in B$ a.î. $b \notin Im(f)$.

Fie $Y := \{0, 1\}$ şi funcţiile f_1, f_2 definite

astfel:

$B \overset{f_1}{\underset{f_2}{\rightrightarrows}} \{0, 1\}$, $f_1(x) := 1, (\forall) x \in B$

$$f_2(x) := \begin{cases} 1, & x \neq b \\ 0, & x = b \end{cases}$$

Evident $f_1 \neq f$ şi $f_1 \circ f = f_2 \circ f$,

contradicţie $\boxtimes$

Exerciţiu Fie $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $f(n) = \begin{cases} 0, & n < 7 \\ n-6, & n \geq 7 \end{cases}$

Calculaţi o secţiune a lui f şi arătaţi că f are exact 7 secţiuni.

$\Rightarrow$ Consecinţă: Dacă $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e o funcţie surjectivă cu un număr finit de secţiuni

$\not\Rightarrow f$ este injectivă.

<u>Definiție</u> O funcție $f : A \to B$ s.n. <u>inversabilă</u> dacă $(\exists)$ $g : B \to A$ o funcție a.î.

$$f \circ g = Id_B \text{ și } g \circ f = Id_A. \quad (*)$$

<u>Obs</u>: Inversa unei funcții, dacă există, este unică și se <u>notează cu f^{-1}</u>. În adevăr, fie $g, g' : B \to A$ două funcții ce verifică $(*)$.

Atunci avem:

$$g' = g' \circ Id_B = g' \circ (f \circ g) = (g' \circ f) \circ g =$$

$$= Id_A \circ g = g, \quad \text{i.e. } \underline{g' = g}.$$ ☒

<u>COROLAR 3</u> (caracterizarea funcțiilor inversabile)
O funcție $f : A \to B$ este inversabilă $\Longleftrightarrow$ este bijectivă.

<u>Dem</u> „$\Rightarrow$" g este simultan retractă și secțiune pentru f și aceum aplic b) ⇒ a) din Teoremele 1 și 2 ⇒ f e injectivă și surjectivă, deci bijectivă.

„$\Leftarrow$" Pp. că f e bijectivă ⇒ f e injectivă și surjectivă ⇒ $(\exists)$ $r, s : B \to A$ a.î. r e retractă și s e secțiune pentru f.

Avem că: $\quad$ r e retractă pt. f $\quad$ s e secțiune

$$s = \mathrm{Id}_A \circ s \overset{\downarrow}{=} (r \circ f) \circ s = r \circ (\underline{f \circ s}) \overset{\downarrow}{=}$$

$$= r \circ \mathrm{Id}_B = r$$

i.e. $s = r \overset{\text{not}}{=} g$, verifică condiția $(*)$. $\boxtimes$

Exerciții 1) Fie $A = \{1, 2, \dots m\}$, $B = \{1, 2, \dots n\}$ cu $m, n \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculați numărul funcțiilor $f : A \to B$.

b) –"– – – – – – – – injective $f : A \to B$.

c) –"– – – – – – – – surjective $f : A \to B$.

d) –"– – – – – – – – bijective $f : A \to B$

2) Fie A o mulțime nevidă. Arătați că:

a) $(\exists)$ o bijecție $\mathcal{P}(A) \simeq \mathrm{Hom}(A, \{0,1\})$

b) ~~Arătați~~ că ~~$(\exists)$~~ $f : A \to \mathcal{P}(A)$ o funcție surjectivă.

3) Fie A o mulțime finită și $f : A \to A$ o funcție. S.E.A.:

a) f e injectivă b) f e surjectivă c) f e bijectivă

4) Fie X, Y, Z mulțimi nevide. Arătați că există o bijecție

$$\mathrm{Hom}(X, \mathrm{Hom}(Y, Z)) \simeq \mathrm{Hom}(X \times Y, Z)$$

Produsul direct (cartezian) de mulţimi. Axioma alegerii

Fie $I \neq \phi$ o mulţime nevidă şi $(A_i)_{i \in I}$ o familie de mulţimi nevide. Atunci:

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{ x \mid (\exists)\, i \in I \text{ a.î. } x \in A_i \}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{ x \mid x \in A_i, (\forall)\, i \in I \}.$$

Definiţie: Fie $I \neq \phi$ şi $(A_i)_{i \in I}$ o familie de mulţimi nevide. Mulţimea:

$$\prod_{i \in I} A_i := \{ x : I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \mid x(i) \in A_i, (\forall)\, i \in I \}$$

s.n. produsul direct (cartezian) al familiei $(A_i)_{i \in I}$

Axioma alegerii: Dacă $(A_i)_{i \in I}$ este o familie nevidă (i.e. $I \neq \phi$) de mulţimi nevide atunci $\prod_{i \in I} A_i$ este o mulţime nevidă.

Observaţii: 1) Există multe forme echivalente de a formula axioma alegerii. Una dintre ele, folosită în informatică, este următoarea:

"dacă $\mathcal{J}$ este o colecție nevidă de mulțimi nevide, disjuncte două câte două, atunci există o mulțime A (numită mulțime selectivă) a.î. $A \cap X$ este o mulțime formată dintr-un singur element, $(\forall)\, X \in \mathcal{J}$."

2) Fie $\prod_{i \in I} A_i$ produsul direct al familiei $(A_i)_{i \in I}$

Un element $x \in \prod_{i \in I} A_i$ este o funcție

$x : I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$ și se notează $x \overset{not}{=} (x_i)_{i \in I}$

unde $x_i :\overset{def}{=} x(i) \in A_i$, $(\forall)\, i \in I$.

Pentru fiecare $i \in I$, funcția

$$\pi_i : \prod_{i \in I} A_i \longrightarrow A_i, \quad \pi_i(x) := x(i) \overset{not}{=} x_i$$

s.n. proiecție canonică a produsului direct pe componenta A_i. Folosind axioma alegerii se vede imediat că fiecare π_i e o funcție surjectivă

Observație Fie I și A mulțime nevide și fie colecție de mulțimi $(A_i)_{i \in I}$ cu $A_i :\overset{def}{=} A$, $(\forall)\, i \in I$

Atunci $\prod_{i \in I} A_i = \{ x : I \longrightarrow A \mid x = \text{funcție} \}$

$$= \mathrm{Hom}(I, A) \overset{not}{=} A^I$$

Teorema 4 (proprietatea de universalitate a produsului direct de mulțimi)

Fie $(A_i)_{i\in I}$ o familie nevidă de mulțimi nevide.

Atunci: $(\forall)$ N = mulțime

$(\forall)$ $u_i : N \longrightarrow A_i$ o familie de funcții $(i \in I)$

$(\exists!)$ $u : N \longrightarrow \prod_{i\in I} A_i$

$$
\begin{tikzcd}
 & N \arrow[dl, dashed, "(\exists!)\, u"'] \arrow[d, "(\forall)\, u_i"] \arrow[dl, phantom, shift left=6, "="] \\
\prod_{i\in I} A_i \arrow[r, "\pi_i"] & A_i
\end{tikzcd}
$$

o funcție a.î. diagramele sunt comutative

i.e. $\pi_i \circ u = u_i$, $(\forall)$ $i \in I$.

Demonstrație • unicitatea lui u:

Fie $u : N \longrightarrow \prod_{i\in I} A_i$ o funcție a.î. $\pi_i \circ u = u_i$, $(\forall)$

Pentru fiecare $n \in N$, notăm $u(n) \overset{not}{=} (n_i)_{i\in I}$,

$n_i \in A_i$, $(\forall)$ $i \in I$.

$(\pi_i \circ u)(n) = u_i(n) \Longrightarrow \pi_i\left((n_i)_{i\in I}\right) = u_i(n)$

$\Longrightarrow n_i = u_i(n)$, $(\forall)$ $i \in I$ $\Longrightarrow$

$u(n) = \left(u_i(n)\right)_{i\in I}$, i.e. u e unic determinată de familia u_i.

• Existența: Definim $u : N \longrightarrow \prod_{i\in I} A_i$

prin formula:

$u : N \longrightarrow \prod_{i\in I} A_i$, $u(n) \overset{def}{:=} (u_i(n))_{i\in I}$, $(\forall) n\in N$

Atunci u e o funcție și $\pi_i \circ u = u_i$, $(\forall) n \in N$ $\boxtimes$

$\underline{\text{Obs}}$: Prop. de univ. a produsului direct se reformulează astfel: $(\forall)(A_i)_{i\in I}$ o familie nevidă de mulțimi nevide și $(\forall)$ N o mulțime nevidă funcția:

$$\chi : \mathrm{Hom}(N, \prod_{i\in I} A_i) \xrightarrow{\sim} \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}(N, A_i)$$

$$\chi(u) := (\pi_i \circ u)_{i\in I}$$

este <u>bijectivă</u>!

În particular, pentru $I = \{1, 2\} \Rightarrow (\exists)$ o <u>bijecție</u>

$$\mathrm{Hom}(N, A_1 \times A_2) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(N, A_1) \times \mathrm{Hom}(N, A_2)$$

$$u \longmapsto (\pi_1 \circ u, \pi_2 \circ u)$$

(<u>reflexie</u>: comparați acest rezultat cu Exercițiu 4) de la pag. 20). $\boxtimes$

Mulțimi numărabile

Definiție a) Două mulțimi A și B s.n. echipotente (sau au aceiași cardinal) și notăm aceasta cu $A \simeq B$ (sau $|A| = |B|$) dacă $(\exists)$ $f : A \to B$ bijectivă.

b) O mulțime A s.n. numărabilă dacă $A \simeq \mathbb{N}$, i.e. $(\exists)$ $f : \mathbb{N} \to A$ o funcție bijectivă.

c) O mulțime A s.n. finită dacă $(\exists)$ $n \in \mathbb{N}$ a.î. $A \simeq \{1, \dots n\}$ în acest caz notăm $|A| = n$.

Obs: A e numărabilă $\Longleftrightarrow$ elementele sale se pot scrie ca un șir infinit, i.e. $A = \{a_0, a_1, \dots, a_n, \dots\}$

Exemple și exerciții

1) Dacă A e numărabilă și $B \subseteq A$ $\Rightarrow$ B este finită sau numărabilă (i.e. B este "cel mult numărabilă"). Mai general, dacă $f : B \to A$ este injectivă și A = numărabilă $\Rightarrow$ B este cel mult numărabilă.

2) Dual, dacă $g : A \to B$ este surjectivă și A e numărabilă $\Rightarrow$ B este cel mult numărabilă. (Ex!)

2) Mulțimea numerelor întregi $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots$ este numărabilă. Dați exemple, explicit, de o funcție $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ bijectivă.

3) Mulțimea $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e numărabilă.

Arătați că $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,

$$f(a, b) := 2^a (2b+1) - 1, \ (\forall)\, a, b \in \mathbb{N}$$

este bijectivă.

Exerciții 1) Arătați că mulțimea $\mathbb{Q}$ a numerelor raționale este numărabilă.

2)* Arătați că mulțimea următoare (numerelor algebrice)

$$A = \{ z \in \mathbb{C} \mid (\exists)\, n \in \mathbb{N}, (\exists) a_0, a_1, \dots a_{n-1} \in \mathbb{Q}$$
$$\text{a.î. } z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0 \}$$

este numărabilă.

Teoremă (Cantor) Mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$ nu este numărabilă.

Dem: Pp. că $\mathbb{R}$ este numărabilă $\Rightarrow (0, 1)$ este numărabilă, i.e.

$$(0, 1) = \{ a_1, a_2, \dots a_n, \dots \}$$

Scriem fiecare element a_n în reprezentare zecimală:

$$a_1 = \overline{0, a_{11} a_{12} a_{13} \dots a_{1k} \dots}$$
$$a_2 = \overline{0, a_{21} a_{22} a_{23} \dots a_{2k} \dots}$$
$$\vdots$$
$$a_n = \overline{0, a_{n1} a_{n2} \dots a_{nk} \dots}$$
$$\vdots$$

Pentru fiecare $n \geq 1$, fie b_{nn} o cifră zecimală diferită de 0, 9 și a_{nn} și considerăm numărul

$$(0,1) \ni x \overset{def}{:=} \overline{0,b_{11}b_{22}\dots b_{nn}\dots} \notin \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$$

căci (folosim unicitatea scrierii în reprezentarea zecimală) $x \neq a_1$ $(b_{11} \neq a_{11})$, $x \neq a_2$ (căci $b_{22} \neq a_{22}$) . . . ☐

Definiție Fie A, B date mulțimi. Spunem că A are cardinal mai mic decât B și notăm $|A| \leq |B|$, dacă $(\exists)$ $f : A \longrightarrow B$ o funcție injectivă. Dacă $|A| \leq |B|$ și $|A| \neq |B|$ o să notăm $|A| < |B|$.

Teoremă (Cantor) Pentru orice mulțime A, avem că $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.

Dem: Funcția $i : A \longrightarrow \mathcal{P}(A)$, $i(a) := \{a\}$, $(\forall)$ $a \in A$ este evident injectivă, i.e. $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$.

Pp. că $(\exists)$ $f : A \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ o funcție bijectivă și fie $B := \{a \in A \mid a \notin f(a)\} \subseteq A$.

Cum f este surjectivă $\Longrightarrow$ $(\exists)$ $b \in A$ a.î. $f(b) = B$.

• Dacă $b \in B \Rightarrow b \notin f(b) = B$, contradicție

• Dacă $b \notin B \Rightarrow b \in f(b) = B$, contradicție. $\boxtimes$

"Corolar naiv" : Nu există "cea mai mare" mulțime (cel mai mare cardinal).

Temă de referat : Teorema (Cantor - Schröder - Bernstein)
Fie A, B două mulțimi a.î. $|A| \leq |B| \leq |A|$.
Atunci $|A| = |B|$.

Temă de cercetare : Fie $f : A \longrightarrow B$ o funcție.
S.n. model al lui f un triplet (X, i, π), unde

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, hook, "i"'] & \arrow[d, phantom, "="] & B \\ & X \arrow[ur, "\pi"'] & \end{tikzcd}$$

X = mulțime, $i : A \longrightarrow X$ este injectivă
$\pi : X \longrightarrow B$ este surjectivă și
$f = \pi \circ i$

Un model (X, i, π) s.n. model inițial dacă pentru orice alt model (Y, j, p) al lui f

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, hook, "i"] \arrow[ddr, bend right, "j"'] & & B \\ & X \arrow[ur, "\pi"] \arrow[d, dashed, "g"] & \\ & Y \arrow[uur, bend right, "p"'] & \end{tikzcd}$$

$(\exists!)\ g : X \longrightarrow Y$ a.î.
$g \circ i = j$ și $p \circ g = \pi$

Întrebare: Are orice funcție un model? Dar un model inițial? Dar un model final?

Model final : definiție e similară, mai puțin finalul
$(\exists!)\ g : Y \longrightarrow X$ a.î. $g \circ j = i$ și $\pi \circ g = p$.

<u>Indicație</u>: • Orice funcție $f: A \to B$ are un model! Un exemplu de model e următorul:

• Dacă $f: A \longrightarrow B$ e <u>surjectivă</u>, aleg
$X := A$, $i := Id_A$ și $\pi := f$.

• Dacă f <u>nu</u> e surjectivă fie $C := B \setminus Im(f)$
$X := A \cup C$, $i: A \hookrightarrow A \cup C$, $i(a) := a$
și $\pi: A \cup C \longrightarrow B$ definită prin

$$\pi(x) := \begin{cases} f(x), & \text{dacă } x \in A \\ x, & x \in C. \end{cases}$$

Atunci $f = \pi \circ i$ și $(A \cup C, i, \pi)$ e model pt. f $\boxtimes$

• <u>Definiția constructivă a lui $\mathbb{N}$.</u>

Fie A o mulțime. Atunci mulțimea
$A' := A \cup \{A\}$ s.n. <u>mulțimea succesor a lui</u>

Fie $|A| = card(A) :=$ clasa tuturor mulțimilor B a.î. există $f: B \to A$ o funcție bijectivă.

Definim:

$$0 := |\phi|, \quad 1 := |\{\phi\}| = |\phi'|$$

$$2 := |(\phi')'| = |\{\{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}|$$

Presupunem că am definit $n := |A|$.

Atunci definim

$$n+1 \overset{not}{=} n' := |A'|.$$

$\boxtimes$

- Relații pe mulțimi

Definiție: Fie A o mulțime nevidă. O submulțime $\rho \subseteq A \times A$ s.n. relație binară pe A. Dacă $(x, y) \in \rho$ atunci scriem/notăm $x \rho y$.

Exemple 1) $\Delta_A := \{(a, a) \mid a \in A\}$ e o relație pe A, numită diagonala lui A.

2) $U^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ e o relație binară pe $\mathbb{R}$.

Definiție: Fie ρ o relație binară pe A. Atunci:

a) ρ s.n. reflexivă dacă $x \rho x$, $(\forall)\, x \in A$, i.e. $\Delta_A \subseteq \rho$.

b) ρ s.n. simetrică dacă $x \rho y \Rightarrow y \rho x$, $(\forall)\, x, y \in A$.

c) ρ s.n. tranzitivă dacă $x \rho y$ și $y \rho z \Rightarrow x \rho z$, $(\forall)\, x, y, z \in A$.

d) ρ s.n. antisimetrică dacă $x \rho y$ și $y \rho x \Rightarrow x = y$.

Definiție Fie ρ o relație binară pe A.

a) ρ s.n. relație de echivalență dacă este reflexivă, simetrică și tranzitivă.

b) ρ s.n. relație de ordine (în acest caz perechea (A, ρ) s.n. mulțime ordonată) dacă este reflexivă, antisimetrică și tranzitivă.

O mulțime ordonată (A, ρ) se mai notează cu $(A, \leq)$. În alte terminologii (A, ρ) s.n. parțial ordonată sau poset.

Exemple 1) $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ este o mulțime ordonată.

2) $(\mathbb{R}, \leq)$ este o mulțime ordonată.

3) $(\mathbb{N}^*, |)$, unde "$|$" e relație de divizibilitate e ordonată, căci $2 \mid -2$ și $-2 \mid 2$, $2 \neq -2$. $(\mathbb{Z}^*, |)$ *nu* este o mulțime ordonată. $\boxed{}$

Definiție: Fie $(A, \leq)$ o mulțime ordonată.

a) Un element $m \in A$ s.n. maximal dacă $m \leq a$, $a \in A \implies a = m$.

b) Un element $p \in A$ s.n. prim element dacă $p \leq x$, $(\forall)$ $x \in A$.

c) Fie $B \subseteq A$ o submulțime. Un element $a \in A$ s.n. supremumul (resp. infimumul) lui B și scriem asta $a = \sup(B)$, (resp. $a = \inf(B)$)

dacă au loc următoarele două condiții:

$\cdot\ x \le a,\ (\forall)\ x \in B$ (resp, $\cdot\ a \le x,\ (\forall)\ x \in B$)

$\cdot\cdot\ x \le a',\ (\forall)\ x \in B \Rightarrow a \le a'$

(respectiv, $a' \le x,\ (\forall)\ x \in B \Rightarrow a' \le a$).

Exemple 1) Fie $(\mathbb{N}^*, |)$ nu are elemente maximale, dar $p = 1$ este un prim element.

$(\mathbb{Z}^*, |)$ nu are elemente maximale și ± 1 sunt prim elemente.

2) $(\mathcal{P}(A), \subseteq) \Rightarrow \phi$ e prim element în $\mathcal{P}(A)$

Conceptele de ~~ele~~element minimal și ultim element ale unei mulțimi ordonate $(A, \le)$ se definesc similar (Exercițiu: definiți-le!)

Fie $B \subseteq (A, \le)$ o submulțime într-o mulțime ordonată. Un element $a \in A$ s.n. majorant (resp. minorant) al lui B dacă $x \le a$ (resp. $a \le x$), $(\forall)\ x \in B$.

O mulțime ordonată $(A, \le)$ s.n. latice dacă $(\exists)$ sup$\{a, b\}$ și inf$\{a, b\}$, $(\forall)$ $a, b \in A$.

Exemple 1) Fie A = mulțime $\Rightarrow$ $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ este o latice. Dacă $A_1, A_2 \subseteq A$, atunci

$$\inf\{A_1, A_2\} = A_1 \cap A_2, \quad \sup\{A_1, A_2\} = A_1 \cup A_2$$

(Exercițiu: probați aceste afirmații!)

2) $(\mathbb{R}, \leq)$ e o latice: dacă $x, y \in \mathbb{R}$ atunci

$$\inf\{x, y\} = \min\{x, y\}, \quad \sup\{x, y\} = \max\{x, y\}$$

3) Exercițiu Este $(\mathbb{N}^*, |)$ o latice?

Definiții: Fie $(A, \leq)$ o mulțime ordonată.

1) $(A, \leq)$ s.n. bine ordonată dacă orice submulțime nevidă a sa are un prim element

2) $(A, \leq)$ s.n. total ordonată dacă $(\forall)$ $a, b \in A$ avem $a \leq b$ sau $b \leq a$.

3) $(A, \leq)$ s.n. inductiv ordonată dacă orice submulțime total ordonată a sa are un majorant.

În teoria mulțimilor, axiomatica Z-F, există următoarele rezultate fundamentale:

Lema lui Zorn: Orice mulțime inductiv ordonată are un element maximal.

Această lemă o veți folosi des în matematica din facultate!

Teorema lui Zermelo: Dacă A e o mulțime nevidă, atunci există o relație de ordine $\leq$ pe A a.î. $(A, \leq)$ este mulțime bine ordonată.

Această "teoremă" a fost inclusă ulterior ca axioma 9 (ultima) în sistemul de axiome Z-F.

În fapt, în teoria mulțimilor se demonstrează un rezultat mai profund și anume: acceptând primele 8 axiome ZF atunci:

- axioma alegerii
- Lema lui Zorn
- Teorema lui Zermelo

sunt afirmații echivalente. În fapt, axioma alegerii a fost enunțată de Zermelo în 1904 pentru a demonstra teorema lui. Gödel în 1938 a demonstrat "independența" și "consistența" axiomei alegerii cu celelalte 8 axiome ZF: i.e. ea nu se poate demonstra și nici infirma din cele 8 axiome ZF.

In 1931 Gödel a demonstrat două rezultate remarcabile în matematică / logică / filozofie : sunt numite **teoremele de incompletitudine Gödel** și ele arată "limitările" oricărui sistem de axiome.

Pe scurt, dacă un sistem de axiome (ce conține aritmetica Peano) este necontradictoriu, atunci el "**nu e complet**" : i.e. există un enunț care <u>nu</u> se poate demonstra și nici <u>infirma</u> din sistemul de axiome!

<u>Ipoteza Continuumului</u> : "Nu există o mulțime A a.î. $|\mathbb{N}| \overset{not}{=} \aleph_0 < |A| < |\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$".

Această afirmație a fost formulată, sub formă de conjectură, de Cantor și Hilbert.

- In 1939, <u>Gödel</u> a arătat că ipoteza continuumului este <u>necontradictorie</u> cu celelalte axiome din ZF (i.e. nu poate fi infirmată folosind cele ~~alte~~ axiome ZF).
- In 1962 <u>P. J. Cohen</u> a arătat că ipoteza continuumului este <u>independentă</u> de celelalte axiome ZF (i.e. <u>nu</u> se poate demonstra din cadrul de axiome ZF).

<u>Rezumat</u> : Ipoteza (C) este deci un exemplu remarcabil pentru prima teoremă de

incompletitudine a lui Gödel: fiind o afirmație matematică care nu se poate demonstra și nici infirma din axiomele ZF!

• Relații de echivalență

Def O relație binară ρ pe A s.n. relație de echivalență dacă este reflexivă, simetrică și tranzitivă.

Notație: O relație de echivalență ρ s.n. „$\sim$" sau „$\approx$" etc: $x \rho y \overset{not}{\iff} x \sim y$.

Exemple 1) Fie $A := \mathbb{R}$ și relația pe $\mathbb{R}$:
$x \sim y \overset{def}{\iff} y - x \in \mathbb{Z}$. Atunci $\sim$ e relație de echivalență pe $\mathbb{R}$ (Exercițiu!)

2) Fie $A := \mathbb{Z}$ și $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ fixat. Pe $\mathbb{Z}$ definim relația:
$a \sim b \overset{def}{\iff} n \mid a - b$; $\sim \overset{not}{=} \equiv (\text{mod } n)$

i.e. $a \equiv b (\text{mod } n) \overset{def}{\iff} n \mid a - b$

Atunci $\sim = \equiv (\text{mod } n)$ e relație de echivalență pe $\mathbb{Z}$ (Exercițiu!) numită relația de congruență modulo n.

3) Fie $\mathcal{P}$ un plan fixat și $\mathcal{C} :=$ mulțimea tuturor dreptelor din $\mathcal{P}$. Pe $\mathcal{C}$ definim relația:

$$d_1 \sim d_2 \overset{def}{\iff} d_1 \text{ este paralelă cu } d_2 \text{ sau } d_1 = d_2.$$

Atunci $\sim$ e o relație de echivalență pe $\mathcal{C}$.

4) Fie $f : A \longrightarrow B$ o funcție și pe A definim relația $\rho_f \overset{not}{=} \sim_f$ astfel:

$$a \underset{f}{\sim} b \overset{def}{\iff} f(a) = f(b).$$

Atunci $\underset{f}{\sim}$ este relație de echivalență pe A numită relație de echivalență indusă de f.

<u>Caz special</u>: Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(r) = \cos(2\pi r) + i\sin(2\pi r)$. Atunci

$$x \underset{f}{\sim} y \iff f(x) = f(y) \iff \cos(2\pi x) + i\sin(2\pi x) = \cos(2\pi y) + i\sin(2\pi y) \iff \begin{cases} \cos(2\pi x) = \cos(2\pi y) \\ \sin(2\pi x) = \sin(2\pi y) \end{cases}$$

$\iff$ (Exercițiu!) $y - x \in \mathbb{Z}$, i.e. $\underset{f}{\sim}$ coincide cu relația de la Exemplul 1).

<u>Definiție</u> Fie $\sim$ o relație de echivalență pe A și $a \in A$. Mulțimea

$$\hat{a} := \{ b \in A \mid b \sim a \}$$

s.n. <u>clasa de echivalență</u> a elementului a. Mulțimea tuturor claselor de echivalență se notează cu $A/_{\sim}$ și s.n. <u>mulțimea factor a lui A prin $\sim$</u>.

Deci, $A/_{\sim} = \{ \hat{a} \mid a \in A \}$.

Funcţia $\pi : A \longrightarrow A/_{\sim}$, $\pi(a) := \hat{a}$, $(\forall) a \in A$

este surjectivă (Exercițiu!) s.n. surjecţie (proiecţie) canonică. Observăm că $\widetilde{\pi} = \sim$.

Definiţie Fie A o mulţime nevidă şi $(A_i)_{i \in I}$ o familie de submulţimi nevide ale lui A. $(A_i)_{i \in I}$ s.n. partiţie a lui A dacă:

a) $A_i \cap A_j = \emptyset$, $(\forall)\ i \neq j \in I$.

b) $\bigcup_{i \in I} A_i = A$.

Exemplu 1) $A_1 = \{ 2n \mid n \in \mathbb{Z} \}$ şi $A_2 := \{ 2n+1 \mid n \in \mathbb{Z} \}$, atunci $\{A_1, A_2\}$ e o partiţie a lui $\mathbb{Z}$.

2) Grupele de studenţi formează o partiţie a seriei

Propoziţia 1 Fie $\sim$ o relaţie de echivalenţă pe A. Atunci:

1) $a \in \hat{a}$, $(\forall)\ a \in A$; i.e. $\hat{a} \neq \emptyset$, $(\forall)\ a \in A$.

2) $\hat{a} = \hat{b} \iff a \sim b$.

3) Dacă $a, b \in A$ atunci $\hat{a} = \hat{b}$ sau $\hat{a} \cap \hat{b} = \emptyset$

4) $A = \bigcup_{\hat{a} \in A/_{\sim}} \hat{a}$

Dem 1) Cum $a \sim a$ (reflexivitatea) $\Rightarrow a \in \hat{a}$.

2) „$\Rightarrow$" $a \in \hat{a} = \hat{b} \Rightarrow a \in \hat{b} \Rightarrow a \sim b$.

„$\Leftarrow$" Pp. că $a \sim b$.

„$\subseteq$" Fie $x \in \hat{a} \Rightarrow x \sim a \sim b \Rightarrow x \sim b \Rightarrow$
$\Rightarrow x \in \hat{b} \Rightarrow \hat{a} \subseteq \hat{b}$

„$\supseteq$" Analog: $y \in \hat{b} \Rightarrow y \sim b \sim a \Rightarrow y \sim a \Rightarrow$
$\Rightarrow y \in \hat{a} \Rightarrow \hat{b} \subseteq \hat{a}$

i.e. $a \sim b \Rightarrow \hat{a} = \hat{b}$.

3) Pp. că $\hat{a} \cap \hat{b} \neq \phi$ și fie $z \in \hat{a} \cap \hat{b} \Rightarrow$
$z \sim a$ și $z \sim b \Rightarrow a \sim z \sim b \Rightarrow$ (tranz)
$a \sim b \overset{2)}{\Rightarrow} \hat{a} = \hat{b}$.

4) „$\supseteq$" ok căci $\hat{a} \subseteq A$. „$\subseteq$" $a \in A \overset{1)}{\Rightarrow} a \in \hat{a}$ i.e.
$a \in \bigcup_{\hat{a} \in A/_{\sim}} \hat{a}$. ☒

Consecință: Dacă $\sim$ e relație de echivalență pe A
$\Rightarrow$ mulțimea factor $A/_{\sim}$ a claselor de echivalență
formează o partiție a lui A. (punctele 3) și 4)
din Propoziția 1).

Reciproc, fie $(A_i)_{i \in I}$ o partiție a mulțimii
A și definim relația de echivalență:

$a \approx b \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\exists)\, i \in A$ a.î. a și $b \in A_i$

Atunci $\approx$ este o relație de echivalență pe A ale cărei clase de echivalență sunt mulțimile A_i, i.e. $A/_{\approx} = \{ A_i \mid i \in I \}$. (Exercițiu!)

<u>Exercițiu</u> Fie A o mulțime nevidă. Atunci există o <u>bijecție</u> între mulțimea tuturor relațiilor de echivalență pe A și mulțimea tuturor partițiilor lui A.

<u>Definiție</u> Fie $\sim$ o relație de echivalență pe A. O familie de elemente $(a_i)_{i\in I}$ ale lui A s.n. <u>sistem de reprezentanți pentru $\sim$</u> dacă:

- $(\forall)\, i \neq j \in I$ avem că $a_i \nsim a_j$ (a_i nu este echivalent cu a_j).
- $(\forall)\, a \in A$, $(\exists)\, i \in I$ a.î. $a \sim a_i$

<u>Observații</u>: 1) Pentru orice relație de echivalență $\sim$ pe A <u>există</u> un sistem de reprezentanți!

În adevăr, dacă $A/_{\sim} = \{ C_i \mid i \in I \}$, atunci folosind axioma alegerii putem extrage câte un element $a_i \in C_i$, și numai unul, $(\forall)\, i \in I$. Atunci $(a_i)_{i\in I}$ este sistem de reprezentanți (vezi propoziția 1).

2) Dacă $(a_i)_{i\in I}$ este un sistem de reprezentanți $\Rightarrow$ funcția

$$f : \{a_i \mid i \in I\} \xrightarrow{\sim} A/_\sim$$
$$f(a_i) := \widehat{a_i}, \quad (\forall)\, i \in I$$

este bijectivă (Exercițiu !).

În fapt, un sistem de reprezentanți poate fi redefinit ca o submulțime $X \subseteq A$ a.î. funcția $\pi|_X : X \longrightarrow A/_\sim$, $\pi|_X(x) := \widehat{x}$ este bijectivă. $\boxtimes$

<u>Exemple</u> 1) $A := \mathbb{C}$ și definim relația de echiv: $z_1 \sim z_2 \iff \arg(z_1) = \arg(z_2)$. Atunci $U^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ e un sistem de reprezentanți pentru $\sim$ (Verificați acest lucru !)

2) Fie $A := \mathbb{Z}$ și $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$ și relația
$$x \equiv y \pmod n \iff n \mid x - y.$$
Atunci $\{0, 1, \dots, n-1\}$ este un sistem de reprezentanți (Exercițiu) și $\mathbb{Z}/_\equiv \overset{not}{=} \mathbb{Z}_n \overset{2)}{=} \{\hat{0}, \hat{1}, \dots \widehat{n-1}\}$.

Evident, a şi $\{-2, -1, 0, 1, \dots, n-3\} \subseteq \mathbb{Z}$ este sistem de reprezentanţi.

Exerciţiu* Pe mulţimea $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ definim relaţia:

$$(a, b) \equiv (a', b') \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\exists) \text{ o pereche } \underline{(g, \alpha) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}}$$

a.î. $\begin{cases} a = g^2 a' + \alpha^2 - b\alpha \\ b = g b' + 2\alpha \end{cases}$

1) Arătaţi că $\equiv$ e relaţie de echivalenţă pe $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$

2) Arătaţi că mulţimea factor $\mathbb{C}\times\mathbb{C}/_{\equiv}$ are două elemente $\{\widehat{(0,0)}, \widehat{(0,1)}\}$.

3) Rezolvaţi problema similară (i.e. aceiaşi relaţie) pe mulţimile $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ şi $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$.

(0,5 puncte)

• Construcţia mulţimilor de numere $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.

Mulţimea numerelor naturale $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$ se defineşte/construieşte fie cu axiomatica Peano şi fie din axiomele ZF (vezi pag. 25). Pornind de la $\mathbb{N}$ vom construi riguros $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ şi apoi $\mathbb{R}$.

• Construcţia lui $\mathbb{Z}$

Pe mulţimea $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ definim relaţia binară

$$(a, b) \sim (c, d) \overset{def}{\Longleftrightarrow} a + d = b + c$$

$(\forall)$ $a, b, c, d \in \mathbb{N}$.

Atunci $\sim$ e o relație de echivalență pe $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ și mulțimea factor $\mathbb{N} \times \mathbb{N} /_{\sim} \overset{not}{=} \mathbb{Z}$ și se numește mulțimea numerelor întregi.

Exercițiu arătați că $\sim$ e relație de echivalență pe $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ și funcția $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} /_{\sim} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$,

$f(\widehat{(a, b)}) := a - b$ este bijectivă.

- Construcția lui $\mathbb{Q}$

Pe mulțimea $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ definim relația binară

$$(a, b) \sim (c, d) \overset{def}{\iff} ad = bc, \quad (\forall)\ a, c \in \mathbb{Z},\ b, d \in \mathbb{N}^*$$

Atunci $\sim$ e relație de echivalență (Exercițiu!) pe mulțimea $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ și mulțimea factor

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* /_{\sim} \overset{not}{=} \mathbb{Q}$$

s.n. mulțimea numerelor raționale. $\widehat{(a, b)} \overset{not}{=} \frac{a}{b}$

s.n. fracție.

- Construcția lui $\mathbb{R}$

Un șir $(a_n)_{n \geq 1}$ de numere raționale s.n. șir Cauchy dacă $(\forall)\ k \in \mathbb{N}^*$ $(\exists)\ N_k \in \mathbb{N}^*$ a.î.

$$|a_n - a_m| < \frac{1}{k}, \quad (\forall)\ n, m \geq N_k.$$

Fie $\mathcal{C} \overset{def}{:=}$ mulțimea tuturor șirurilor Cauchy de numere raționale.

Pe mulțimea $\mathcal{C}$ definim relația binară:

$$(a_n)_{n\geq 1} \sim (b_n)_{n\geq 1} \overset{def}{\iff} \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$$

Atunci, $\sim$ e o relație de echivalență pe mulțimea $\mathcal{C}$ (Exercițiu! Indicație: folosiți proprietățile limitelor de șiruri) și mulțimea factor

$$\mathcal{C}/_{\sim} \overset{not}{:=} \mathbb{R} \text{ s.n. mulțimea numerelor reale}$$

obs: Orice șir Cauchy este convergent și bijecția

$$\mathcal{C}/_{\sim} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R} \text{ este } \widehat{(a_n)_{n\geq 1}} \longmapsto \lim_{n\to\infty}(a_n).$$

Teoremă (Proprietatea de universalitate a mulțimii factor)

Fie A o mulțime și $\sim$ o relație de echivalență pe A iar $\pi : A \longrightarrow A/_{\sim}$, $\pi(a) = \hat{a}$ proiecția canonică. Atunci:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "(\forall) f"'] & A/_{\sim} \arrow[dl, dashed, "(\exists!) \bar{f}"] \\ X & \end{tikzcd}$$

$(\forall) X$ o mulțime și $(\forall) f : A \to X$ o funcție cu $\sim \subseteq \rho_f \Rightarrow$ $(\exists!)\ \bar{f} : A/_{\sim} \longrightarrow X$ o funcție a.î. $\bar{f} \circ \pi = f$.

În plus,

a) $\bar{f}$ este surjectivă $\iff$ f este surjectivă

b) $\bar{f}$ este injectivă $\iff$ $\rho_f = \sim$.

Dem: • unicitatea lui $\overline{f}$. Fie $\overline{f} : A/_\sim \longrightarrow X$ o funcție a.î. $\overline{f} \circ \pi = f \Longrightarrow (\overline{f} \circ \pi)(a) = f(a)$

$\Longrightarrow \overline{f}(\hat{a}) = f(a)$, $(\forall)\, \hat{a} \in A/_\sim$, i.e.

$\overline{f}$ este unic determinată de f.

• existența lui $\overline{f}$. Definim:

$\overline{f} : A/_\sim \longrightarrow X$, $\overline{f}(\hat{a}) := f(a)$, $(\forall)\, \hat{a} \in A/_\sim$

• $\overline{f}$ este corect definită (i.e. $\overline{f}$ e funcție!)

Fie $a, b \in A$ a.î. $\underline{\underline{\hat{a} = \hat{b}}} \Longrightarrow a \sim b$

$\Longrightarrow (\sim\, \subseteq \rho_f)\ a\, \rho_f\, b \Longrightarrow f(a) = f(b) \Longrightarrow$

$\underline{\underline{\overline{f}(\hat{a}) = \overline{f}(\hat{b})}}$

• $\overline{f} \circ \pi = f$ este trivială.

a) „$\Longrightarrow$" $\overline{f}$ este surjectivă $\Longrightarrow f = \overline{f} \circ \pi$ este surjectivă (compunerea de surjecții e surjecție!).

„$\Longleftarrow$" Pp. că f e surjectivă și fie $x \in X \Longrightarrow$

$(\exists)\, a \in A$ a.î. $\underline{x} = f(a) = \underline{\overline{f}(\hat{a})}$, i.e.

$\overline{f}$ e surjectivă.

b) „$\Longrightarrow$" știm din ipoteză că $\sim\, \subseteq \rho_f$. Vrem să arătăm că $\rho_f \subseteq \sim$.

$(a,b)\in\rho_f \Rightarrow a\,\rho_f\, b \Rightarrow f(a)=f(b) \Rightarrow$

$\bar f(\hat a)=\bar f(\hat b) \Rightarrow (\bar f$ injectivă$)$ $\hat a=\hat b \Rightarrow$

$a\sim b$, i.e. $\underline{(a,b)\in\sim}$ și deci $\rho_f\subseteq\sim$.

"$\Leftarrow$" $\bar f(\hat a)=\bar f(\hat b) \Rightarrow f(a)=f(b) \Rightarrow$

$a\,\rho_f\, b \Rightarrow a\sim b \Rightarrow \hat a=\hat b$, i.e. $\bar f$ e injectivă. ∎

AVERTIZARE! Când definim o funcție $f : A/_\sim \longrightarrow B$ trebuie să ne asigurăm că e corect definită!

Corolar Orice funcție $f : A \longrightarrow X$ are o descompunere $f = i\circ\pi$, cu i = injectivă și π = surjectivă.

Dem: Fie $\sim\,=\rho_f$ relația de echivalență pe A indusă de f și $\pi : A \longrightarrow A/_{\rho_f}$ proiecția canonică.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f"'] & A/_{\rho_f} \arrow[dl, dotted, "(\exists!)\bar f"] \\ X & \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow (\exists!)\ \bar f : A/_{\rho_f} \longrightarrow X$

a.î. $f = \bar f \circ \pi$

$\bar f$: injectivă căci $\sim\,=\rho_f$.

π: surjectivă ∎

<u>observație</u> Există desigur și alte descompuneri ca în corolar. Una este următoarea:

$$A \xrightarrow{\tilde f} \mathrm{Im}(f) \xhookrightarrow{i} B,$$

unde $\tilde f$ este corestricția lui f la imagine ($\tilde f(x)=f(x)$, $(\forall)\, x\in A$) și i e incluziunea canonică. Evident $f=i\circ\tilde f$.

Exemple 1) Presupunem că **știm** cine e $\mathbb{Z}$ și pe $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ definită prin

$$(a,b)\sim(c,d) \overset{def}{\Longleftrightarrow} a+d=b+c.$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N}\times\mathbb{N} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f"'] & \mathbb{N}\times\mathbb{N}/_{\equiv} \arrow[dl, dashed, "(\exists!)\,\bar{f}"] \\ \mathbb{Z} & \end{tikzcd}$$

$\pi(a,b)=\widehat{(a,b)}$

Fie $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$

$f(a,b):=a-b$

$(\forall)\ a,b\in\mathbb{N}$.

Atunci $\underline{\rho_f=\sim}$. În adevăr, $(a,b)\,\rho_f\,(c,d) \Longleftrightarrow$
$f(a,b)=f(c,d) \Longleftrightarrow a-b=c-d \Longleftrightarrow a+d=b+c$
$\Longleftrightarrow (a,b)\sim(c,d)$

Din P.U.M.F $\Longrightarrow (\exists!)\ \bar{f}:\mathbb{N}\times\mathbb{N}/_{\equiv}\longrightarrow\mathbb{Z}$ a.
funcție a.î. $\bar{f}\left(\widehat{(a,b)}\right)=f(a,b)=a-b$

În plus, $\bar{f}$ este **injectivă** (căci $\rho_f=\sim$) și
$\bar{f}$ este **surjectivă** căci f este surjectivă
$((\forall)\ m\in\mathbb{Z}\ (\exists)\ (a,b)\in\mathbb{N}$ a.î. $m=f(a,b)=a-b)$

$$\Longrightarrow \bar{f}:\mathbb{N}\times\mathbb{N}/_{\equiv}\xrightarrow{\sim}\mathbb{Z},\quad \bar{f}\left(\widehat{(a,b)}\right)=a-b$$

este corect definită și **bijectivă**.

2) Pe mulţimea $\mathbb{C}$ definim relaţia binară

$$z_1 \sim z_2 \overset{def}{\iff} |z_1| = |z_2|.$$

Atunci, $\sim$ e relaţie de echivalenţă pe $\mathbb{C}$ şi există o bijecţie $\underline{\mathbb{C}/_{\sim} \simeq [0, +\infty)}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\shortparallel"] & \mathbb{C}/_{\sim} \arrow[dl, dashed, "(\exists!)\bar{f}"] \\
{[0, +\infty)} &
\end{tikzcd}$$

Fie $f : \mathbb{C} \to [0, +\infty)$ $f(z) := |z|$. Atunci f este $\underline{\text{surjectivă}}$ şi $\underline{\rho_f = \sim}$

căci $z_1 \rho_f z_2 \iff f(z_1) = f(z_2) \iff |z_1| = |z_2| \iff z_1 \sim z_2$

Din P.U.M.F. $\Rightarrow (\exists!)\ \bar{f} : \mathbb{C}/_{\sim} \longrightarrow [0, +\infty)$ funcţie a.î. $\bar{f}(\hat{z}) = |z|$. În plus, $\bar{f}$ este injectivă $(\rho_f = \rho)$ şi surjectivă (f este surj

$\Rightarrow \bar{f}$ este ~~surjec~~ bijectivă.

Mai mult, $\hat{z} = \{w \in \mathbb{C} \mid |w| = |z|\} = \mathcal{C}(0, |z|)$, cercul de centru în origine şi rază $|z|$.

$\underline{\text{Alternativ}}$, putem vedea că $[0, +\infty) \subseteq \mathbb{C}$ este un sistem de reprezentanţi pentru $\sim$ şi deci $\pi\big|_{[0,+\infty)} : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{C}/_{\sim}$, $r \to \hat{r}$ e bijectivă.

3) Fie $A' \subseteq A$, B mulțimi și fie

$$\mathrm{Hom}(A,B) := \{ f : A \to B \mid f = \text{funcție} \}$$

Pe $\mathrm{Hom}(A,B)$ definim relația:

$$f \sim g \overset{def}{\iff} f_{|A'} = g_{|A'}.$$

Atunci există o bijecție

$$\mathrm{Hom}(A,B)/_{\sim} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(A',B).$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(A,B) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "F"'] & \mathrm{Hom}(A,B)/_{\sim} \arrow[dl, dashed, "(\exists!)\,\overline{F}"] \\
\mathrm{Hom}(A',B) &
\end{tikzcd}$$

Definim $F : \mathrm{Hom}(A,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A',B)$

$$F(f) := f_{|A'}.$$

Atunci, $\rho_F = \sim$ și F este surjectivă (Exercițiu!) $\implies$

$$(\exists!)\ \overline{F} : \mathrm{Hom}(A,B)/_{\sim} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(A',B)$$

$$\overline{F}(\widehat{f}) := f_{|A'}$$ și această funcție

$\overline{F}$ este bijectivă (căci F e surjectivă și $\rho_F = \sim$) $\blacksquare$

• Facultativ : relație de echivalență generată de o relație binară

Fie $\rho \subseteq A \times A$ o relație binară și definim

$$\rho^{-1} \overset{def}{:=} \{ (x,y) \in A \times A \mid y \rho x \}$$

i.e. $x \rho^{-1} y \iff y \rho x$.

Obs: $\rho \cup \rho^{-1}$ este o relație simetrică (Exercițiu)

Pentru fiecare $n \geq 2$ definim relația $\rho^n \subseteq A \times A$ astfel:

$$\rho^n := \{ (x,y) \in A \times A \mid (\exists)\ s_1, \dots, s_{n-1} \in A \text{ a.î. } x \rho s_1,\ s_1 \rho s_2, \dots, s_{n-1} \rho y \}.$$

Reamintim că $\Delta_A = \{ (a,a) \mid a \in A \}$ era diagonala lui A.

Teoremă Fie $\rho \subseteq A \times A$ o relație binară pe o mulțime nevidă A și definim

$$(*)\ \langle \rho \rangle := \Delta_A \cup (\rho \cup \rho^{-1}) \cup \Big(\bigcup_{n \geq 2} (\rho \cup \rho^{-1})^n \Big).$$

Atunci,

1). $\langle \rho \rangle$ este o relație de echivalență pe A și s.n. relația de echivalență generată de ρ.

2) $\langle \rho \rangle$ este "cea mai mică" relație de echivalență pe A ce conține ρ, i.e.

dacă R e relație de echivalență pe A și (36)

$R \supseteq \rho \implies \langle \rho \rangle \subseteq R$.

Dem Notăm $\rho' \overset{not}{=} \langle \rho \rangle$.

- ρ' este reflexivă, căci $\Delta_A \subseteq \rho'$.
- ρ' este simetrică:

Pp. că $x \rho' y$ și vrem $y \rho' x$. Pp. $y \neq x$ (altfel e terminat).

$x \rho' y \implies (\exists)\ n \geq 1$ a.î. $(x,y) \in (\rho \cup \rho^{-1})^n$

$\implies (\exists)\ s_1, \dots, s_{n-1} \in A$ a.î.

$x (\rho \cup \rho^{-1}) s_1,\ s_1 (\rho \cup \rho^{-1}) s_2, \dots,\ s_{n-1} (\rho \cup \rho^{-1}) y$

cum $\rho \cup \rho^{-1}$ este relație simetrică $\implies$

$y (\rho \cup \rho^{-1}) s_{n-1}, \dots \dots,\ s_1 (\rho \cup \rho^{-1}) x \implies$

$(y,x) \in (\rho \cup \rho^{-1})^n$ i.e. $y \rho' x$, i.e. ρ' e simetrică

- ρ' este tranzitivă: Pp. că $x \rho' y$ și $y \rho' z$.

Vrem: $x \rho' z$. Fie $m, n \in \mathbb{N}$ a.î.

$x (\rho \cup \rho^{-1}) s_1, \dots, s_{m-1} (\rho \cup \rho^{-1}) y,\ y (\rho \cup \rho^{-1}) t_1,$

$t_1 (\rho \cup \rho^{-1}) t_2, \dots,\ t_{n-1} (\rho \cup \rho^{-1}) z$

$\implies x \rho' z$, mai precis,

$(x,y) \in (\rho \cup \rho^{-1})^m$, $(y,z) \in (\rho \cup \rho^{-1})^n \Longrightarrow$

$(x,z) \in (\rho \cup \rho^{-1})^{m+n}$.

$\Longrightarrow \rho' = \langle \rho \rangle$ e relație de echivalență pe A.

2) Fie R ca la 2). <u>Vrem</u> : $\rho' \subseteq R$.

$\Delta_A \subseteq R$, caci R e relație de echivalență

Fie acum $\underline{(x,y) \in (\rho \cup \rho^{-1})^n} \Longrightarrow$

$x(\rho \cup \rho^{-1})s_1, \ldots, s_{n-1}(\rho \cup \rho^{-1})y$

Dar $\rho \subseteq R \Longrightarrow \rho^{-1} \subseteq R$ și cum R e tranzitiv

$\Longrightarrow (x,y) \in R \Longrightarrow \rho' \subseteq R$. $\blacksquare$

<u>Obs</u> : Din punctul 2) se obține redefiniția abstractă a lui $\langle \rho \rangle$ și anume :

$$\left[\langle \rho \rangle = \bigcap_{\substack{R \supseteq \rho \\ R = \text{relație de echivalență pe } A}} R \right]$$

Formula $(*)$ oferă descrierea explicită a lui $\langle \rho \rangle$

<u>Temă referat</u> : Numere cardinale. Operații cu numere cardinale. (Antinomia lui Cantor) "Mulțimea" tuturor numerelor cardinale este <u>contradictorie</u> !