EXAMEN, ALGEBRĂ I, 21 IANUARIE 2022

Puteti folosi, fară demonstraţie (dar enunţat!), orice rezultat din curs sau seminar. Timp de lucru 2 ore. SUCCES!

Exercitiul 1: Pe mulţimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale definim relaţia binară: $x \approx y$ dacă si numai dacă $(x-y)(x+y+2)=0$.

(a) Arataţi că $\approx$ este o relaţie de echivalenţă pe $\mathbb{R}$ si calculaţi clasele de echivalenţă ale numerelor reale 0, -1 si 2022. **(0.5 puncte)**

(b) Determinaţi un sistem de reprezentaţi ai relaţiei $\approx$. **(1 punct)**

(c) Construiţi o funcţie bijectivă $g : \mathbb{R}/\approx \, \to [2022, +\infty)$, unde $\mathbb{R}/\approx$ este mulţimea factor. **(1 punct)**

Exercitiul 2: Fie permutarea $\tau = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 2 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 4 & 12 & 11 \end{smallmatrix}\right) \in S_{12}$.
(a) Descompuneţi permutarea τ în produs de cicli disjunţi, în produs de transpoziţii şi determinaţi signatura permutării τ. **(1.5 puncte)**
(b) Determinaţi ordinul permutării τ si calculaţi τ^{-2022}. **(1 punct)**

Exercitiul 3: (a) Fie grupul $G := (\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(x) = ax + b, a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}\}, \circ)$ cu compunerea uzuală a funcţiilor şi $\mathcal{N} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(x) = x + b, b \in \mathbb{R}\}$. Arataţi că $\mathcal{N}$ e subgrup normal al lui G şi există un izomorfism de grupuri $G/\mathcal{N} \simeq (\mathbb{R}^*, \cdot)$. **(1 punct)**

(b) Dat un grup finit necomutativ G, să se arate că $|\mathrm{Z}(G)| \leq \frac{|G|}{4}$, $\mathrm{Z}(G)$ fiind centrul lui G. Să se depisteze un exemplu de grup pentru care maximul e atins. **(0.5 puncte)**

(c) Fie G un grup finit, de ordin n si $f : G \to \{1, 2, \ldots, n\}$ o funcţie cu proprietatea că $f(x) = 1 \Leftrightarrow x = 1$ şi $f(x^r) = \frac{f(x)}{(f(x), r)}$, oricare ar fi $x \in G$ şi $r \in \mathbb{N} - \{0\}$. Să se arate că $f(x) = o(x)$, pentru orice $x \in G$, unde $o(x)$ este ordinul elementului x. **(1 punct)**

Exercitiul 4: (a) Arătaţi că mulţimea $R = \{\begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix}; a, b \in \mathbb{Z}\}$ este subinel al inelului de matrice $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. **(1.5 puncte)**
(b) Să se arate că R este izomorf cu inelul $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$, unde $\mathbb{Z}[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3}; a, b \in \mathbb{Z}\}$ cu adunarea si inmulţirea uzuala a numerelor reale **(1 punct)**

Prof. dr. G. Militaru, Drd. Laura Filimon si Drd. Stefan Deaconu